$\dot q = \partial_p H$
$\dot p = -\partial_q H$

(un poco) motivación para el transformación de Legendre

$\mu(u) = \mu(0) + d\mu(u) + \dots$

La transformación de Legendre es :

$$v \mapsto \partial_v L = p$$
$$L \mapsto H = p \cdot v - L$$

Fiber-deriv.

Primero, para $v \in T_qQ$, es natural pensar de la corespondiente $p \in T_q^*Q$.

para $u \in T_qQ$, tenemos

$$p(u) = \frac{d}{ds}_{s=0} L(q, v + su)$$

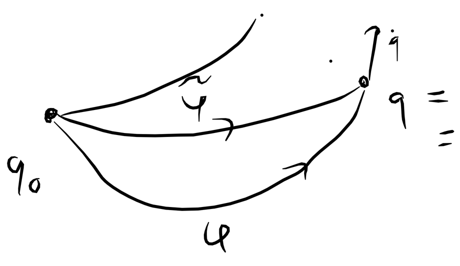
Heuristicamente, un impulso es 'resistencia para cambiar velocidad'.
Si estamos moviendo con velocidad v, el impulso es una función
$\mu : T_qQ \to \mathbb{R}$
que asigne la resistencia $\mu(u)$ de cambiar nuestro velocidad de v a $v + u$.
Entonces $\mu(0) = 0$, y la linearización $p = d_0\mu : T_qQ \to \mathbb{R}$ es un elemento de T_q^*Q.

$*$ la formulación Lagrangiana esta situado en el haz tangente, mientras la formulación Hamiltoniana en el haz cotangente $*$

Diferenciación de la acción

Fijamos un punto $q_0 \in Q$.

Suponemos que para un conjunto abierto de $q \in Q$ y $t \in \mathbb{R}$ hemos escogido extremales
$\phi(q,t\,;\tau)$
parametrizada por τ con $\phi(q,t\,;0) = q_0$ y $\phi(q,t\,;t) = q$.



$q = \varphi(t)$
$= \tilde\varphi(\tilde t)$

Ponemos

$$S(q,t) = \int_0^t L(\phi, \dot\phi)\, d\tau$$

para el acción de ϕ conectando q_0 a q en tiempo t.

$(q,t) \rightsquigarrow \dot q$

Calculamos :

$$dS = \partial_q S \cdot dq + \partial_t S\, dt = p \cdot dq - H\, dt$$

$*$

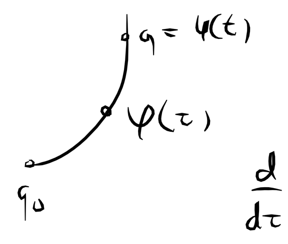
$\partial_q \varphi_t = id$
$\circ\ q = \varphi(q,t\,;t)$

prf: $\partial_q S = \int_0^t \partial_q L \cdot \partial_q \varphi + \partial_v L \cdot \partial_q \dot\varphi \, d\tau$

IBP $= \int_0^t (\partial_q L - \frac{d}{dt}\partial_v L) \cdot \partial_q \varphi \, d\tau + \partial_v L \cdot \partial_q \varphi \Big|_0^t$

0 (ϕ ext.)

$\mathring{q}_0 = \varphi(q,t\,;0)$
$\partial_q \varphi|_0 = 0$



$= \partial_v L = p$.

$\frac{d}{d\tau}\Big|_t S(\varphi(\tau), \tau) = \partial_q S \cdot \dot q + \partial_t S = p \cdot \dot q + \partial_t S$

$\int_0^\tau L\, ds = L$

$\partial_t S = L - p\cdot\dot q$ $\square$.

Notar que $S(q,t)$ satisfie el EDP de primer orden :

$$0 = \partial_t S + H(q, \partial_q S)$$

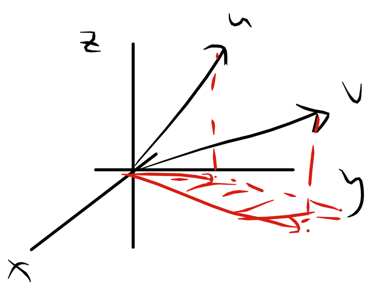
llamada la ecuación de Hamilton – Jacobi.

$\boxed{\partial_t S + H(q, \partial_q S) = 0}$

Breve resumen sobre formas diferenciales

La producta de cuña es una notacion para aplicaciones anti – simetrica y multilineal :

ejemplo :
$dx : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es proyección al eje – x.
$dx \wedge dy : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es proyección del area por plano xy.



$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$

Las 'formas básicas' forman un base para aplicaciones a.s. y multilineal.

$a\, dx \wedge dy + b\, dy \wedge dz + c\, dz \wedge dx$ all 2-forms

$(c_y + b_x + \partial_z a)\, dx \wedge dy \wedge dz$

Formas diferenciales son aplicaciones a.s. y multilineal sobre cada espacio tangente :

ejemplos : $x\,dx + y^2\,dy + xz\,dz$ (1 – forma)
$dx \wedge dy - yx\,dy \wedge dz$ (2 – forma)

(b, c, a)

$\boxed{\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega}$

k-form $\longrightarrow$ k+1 form

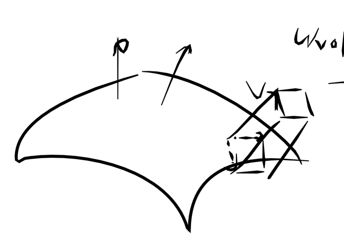
podemos derivar formas diferenciales con la derivada exterior :

ejemplo : $d(xy\,dy - y\,dx) = (y+1)\,dx \wedge dy$

$(y\,dx + x\,dy) \wedge dy - dy \wedge dx$
$= y\,dx \wedge dy + dx \wedge dy$

también con la derivada interior :

$(i_v\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(v, v_1, \dots, v_k)$



$\omega_{vol}(v, \partial_u, \partial_v)\, du\, dv$

v, k+1 form ω
$\iota_v\omega$ k-form

$\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^* \omega$

Cambiar variables hacemos con substitucion :

ejemplo : $dx \wedge dy = r\,dr \wedge d\theta$ en coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

Cambiando coordenadas es por 'retrasar' :
$\phi : X \to Y$
$(\phi^*\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\phi(x)}(d\phi\, v_1, \dots, d\phi\, v_k)$

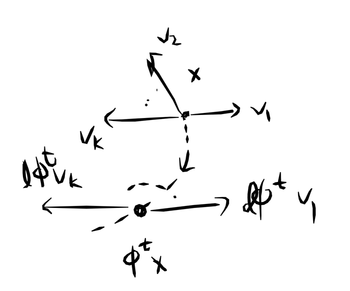
$dx = c\theta\, dr - r s\theta\, d\theta$ $\quad dy = s\theta\, dr + r c\theta\, d\theta$

$(c\theta\, dr - r s\theta\, d\theta) \wedge (s\theta\, dr + r c\theta\, d\theta)$
$r c^2\theta\, dr \wedge d\theta - r s^2\theta\, d\theta \wedge dr$

$\boxed{d\iota_v + \iota_v d = L_v}$

Cartan's magic formula

Las operaciones básicas sobre formas son :
$\wedge$, d, ϕ^*, i_v, L_v



$\frac{d}{dt}\int_{\phi^t D} \omega = \int_D L_v \omega$

L_v es la derivada de Lie :

$$(L_v\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \frac{d}{dt}\,\omega_{\phi^t x}(d\phi^t v_1, \dots, d\phi^t v_k)$$

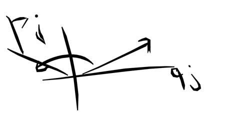
Regresando a mecánica

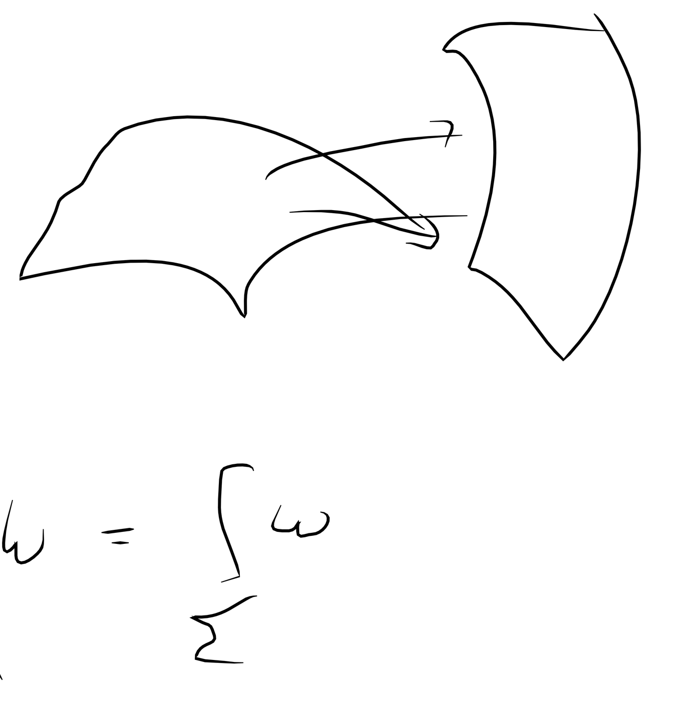
Consideramos una sistema de particulas :
$(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$
$\dot q_j = \partial_{p_j} H$
$\dot p_j = -\partial_{q_j} H$

$\omega(\vec u, \vec v) = \vec u \cdot J \vec v$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ $\quad dH(\vec u) = -\omega(X_H, \vec u)$

$dH = -\iota_{X_H}\omega$





La 2 – forma ω tiene la expresión :

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \dots + dp_n \wedge dq^n = dp \wedge dq$$

$q^j = q_j$
$\sum dp_j \wedge dq^j = dp_j \wedge dq^j$

$\int_{\phi_H^t(\Sigma)} \omega = \int_\Sigma \omega$

$*$

$*$ se puede verificar, por ejemplo, usando la identificación $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$
$(q_1 + i\,p_1, \dots, q_n + ip_n)$
con $\omega(\vec z, \vec w) = \vec z \cdot i\vec w$ y $\partial_{q_j} = e_j, \partial_{p_j} = ie_j$.

Obtenemos una nueva demonstración de la teorema de Liouville.

De hecho, con ϕ_H^t el flujo de X_H, tenemos la más fuerte :

$$\phi_H^{t*}\,\omega = \omega$$

$\frac{d}{dt}\phi_H^{t*}\omega = L_{X_H}\omega = d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H} d\omega$
$= -d(dH) + \iota_{X_H}(0)$
$= 0$

Desde $\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n – veces) es proporcional a $dp_n \wedge \dots \wedge dp_1 \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n = \omega_{vol}$,

tenemos $\phi_H^{t*}\omega_{vol} = \omega_{vol}$, que es la teorema de Liouville.