$$\boxed{\begin{gathered}\underline{\dot{x} = X_H} = -J\nabla_x H \\ dH = -i_{X_H}\omega \\ \omega = dp_1\wedge dq^1 + \ldots + dp_n\wedge dq^n\end{gathered}}$$

$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{q} &= \partial_p H \\ \dot{p} &= -\partial_q H\end{aligned}}$$

Cambias de coordenadas

Para $y = \phi(x)$ nuevos coordenadas sobre $\mathbb{R}^{2n}$

tenemos :

$$\dot{y} = d_x\phi\,\dot{x}$$

$$\hat{H}(y) = H\big(\phi^{-1}(y)\big)$$

$y = \begin{pmatrix} Q(q,p) \\ P(q,p) \end{pmatrix}$

$d_x H = d_y\hat{H}\cdot d_x\phi$

$\nabla_x H\cdot u = \nabla_y\hat{H}\circ d_x\phi u \quad \forall u$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{H} = H\circ\phi^{-1}} \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$\underline{\hat{H}\circ\phi = H}$

$\dot{x} = -J\nabla_x H$

$$\boxed{\Rightarrow \nabla_x H = (d_x\phi)^T\nabla_y\hat{H}}$$

Pon $\underline{A = d_x\phi}$, entonces las ecuaciones de movimiento son :

$$\dot{y} = A\dot{x} = -AJA^T\nabla_y\hat{H}$$

$\omega(u,v) = u\cdot Jv$
$= u\cdot AJA^Tv$
$= \omega(A^Tu, A^Tv)$

$[AJA^T = J \Rightarrow A^TJA = J]$

$\dot{Q} = \partial_P\hat{H}$
$\dot{P} = -\partial_Q\hat{H}$

$\dot{y} = -J\nabla_y\hat{H}$

Si $AJA^T = J$ las ecuaciones de movimiento tienen la misma forma!

Llamamos la aplicacion ϕ un transformacion simplectica o canonica.

Equivalentamente, ϕ es simplectica si $\phi^*\omega = \omega$:

$$\omega(\vec{u},\vec{v}) = \omega(A\vec{u}, A\vec{v}) \quad \text{cada } \vec{u}, \vec{v}.$$

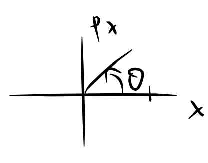
$dP\wedge dQ = dP_1\wedge dQ^1 + \ldots + dP_n\wedge dQ^n = dp_1\wedge dq^1 + \ldots + dp_n\wedge dq^n$

Ejemplo :

para el planar problema de Hooke,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2}{2}$$
$$\omega = dp_x\wedge dx + dp_y\wedge dy$$

$\begin{pmatrix} \ddot{x} = -x \\ \ddot{y} = -y \end{pmatrix}$

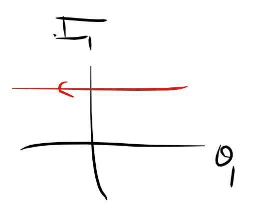


$r_1^2 = p_x^2 + x^2$

$\tan\theta_1 = \frac{p_x}{x}$

$dx\wedge dp_x = r_1\,dr_1\wedge d\theta_1 = dI_1\wedge d\theta_1$

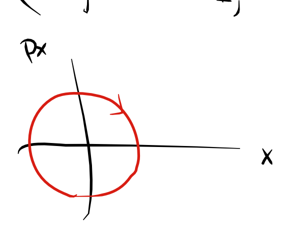
$I_1 = \frac{r_1^2}{2}$



$H = I_1 + I_2$

$d\theta_1\wedge dI_1 + d\theta_2\wedge dI_2$

$\begin{cases} \dot{I}_j = \partial_{\theta_j}H = 0 \\ \dot{\theta}_j = -\partial_{I_j}H = -1 \end{cases}$ $\quad I(t) = I_0$ $\quad \theta(t) = \theta_0 - t$



$\mathbb{R}^{2n}$ $d\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = d\beta$
Poincaré lemma

Una manera de generar transformaciones simplecticas

Observa que $\underline{dP\wedge dQ = dp}\wedge dq$ sigue desde :

$$d(p\cdot dq - P\cdot dQ) = 0$$

o, porque $d^2 = 0$, so existe un función $S(q,Q)$ para que

$$p\cdot dq - P\cdot dQ = dS$$

$p_1dq^1 + \cdots + p_ndq^n = p\cdot dq$

$d(d\alpha) = 0$

$dS = \underline{\partial_q S\cdot dq + \partial_Q S\cdot dQ}$

para que este genera una transformación simplectica, consideramos :

$$p = \partial_q S(q,Q) \quad y \quad \underline{P = -\partial_Q S(q,Q)}.$$

Si el segundo es invertible en q $\big($p.ej. si $\partial_q\partial_Q S$ es invertible$\big)$ determina :

$$q(\underline{Q},P)$$

y ahora por substitución en el primero, tenemos

$$p(Q,P) = \partial_q S(q(Q,P),Q).$$

$\times$ $p\cdot dq + Q\cdot dP = dS$ $\times$

$*$ hay variaciones a este esquema, puedes usar 'otros tipos de funciones generadores : $S(q,P), S(p,Q), S(p,P)$.

ejemplo : $S(q,Q) = q_1Q_1 + \ldots + q_nQ_n - \dfrac{Q_1^2 + \ldots + Q_n^2}{2}$

genera $q_j = Q_j - P_j$, $p_j = Q_j$.

$p_j = \partial_{q_j}S = Q_j$

$P_j = -q_j + Q_j$

$dp\wedge dq = dQ_j\wedge(dQ_j - dP_j) = \underline{dP\wedge dQ}$

Método de Jacobi (seperación de variables)

Considera una sistema mecánica $H(q,p)$.

Buscamos un cambio de variable para que las ecuaciónes de mov. tienen una forma 'sencilla'.

$\dot{Q} = \partial_P\hat{H} = 0$

$\dot{P} = -\partial_Q\hat{H} = \alpha(Q)$

$\begin{cases} Q(t) = Q_0 \\ P(t) = P_0 + \alpha_0\cdot t \end{cases}$

$\begin{cases} \text{time dep} \\ H\text{-}J \end{cases}$

Tratamos de hacer tal cambio desde un función generador $S(q,Q)$ para que $\big($recuerda $p = \partial_q S\big)$

$$H\big(q, \partial_q S(q,Q)\big) = \hat{H}(Q)$$

solo depende de Q.

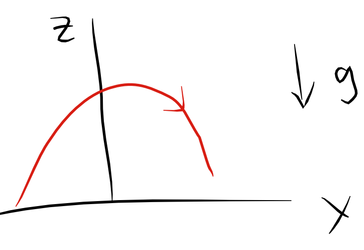
$*$ 1840's Jacobi $*$
2-center problem
pg. 261 Arnold
fixed attractor

En unos casos especiales, se puede resolver este EDP de Hamilton − Jacobi por seperación de variables. Es decir, con una S de la forma :

$$S(q,Q) = S_1(q_1,Q) + \ldots + S_n(q_n,Q)$$

y con suerte, este hipotesis sobre la forma da S decopla $H - J$ en n EDO's para S_j a resolver.

ejemplo : $H = \dfrac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + mgz$



$S = S_1(x) + S_2(z)$

$cst. = \underbrace{\dfrac{S_1'(x)^2}{2m}}_{cst.} + \underbrace{\dfrac{S_2'(z)^2}{2m} + mgz}_{Q_2}$

$\dfrac{(S_1')^2}{2m} = Q_1$

$S_1(x) = x\sqrt{2mQ_1}$

$P_1 = -\dfrac{xm}{\sqrt{2mQ_1}} = -t + k_1$

$\boxed{x = c_1 + tc_2}$

Con $S = x\sqrt{2mQ_1} - \dfrac{(2mQ_2 - 2m^2gz)^{\frac{3}{2}}}{3m^2g}$

Tenemos $H = Q_1 + Q_2$

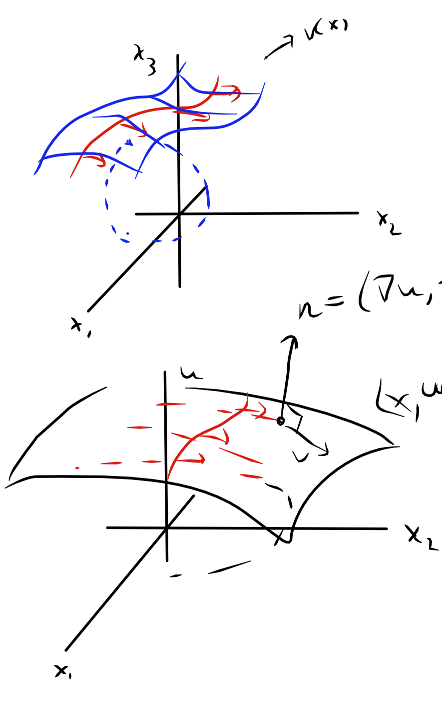
Entonces $P_1 = -t + k_1$, $P_2 = -t + k_2$
y
$P_j = -\partial_{Q_j}S$ conduce a
$x = c_1 + tc_2$, $z = a_1 + a_2t - \dfrac{g}{2}t^2$ (como esperamos)

Método de caracteristicas

puede convertir una EDP de primer orden a una sistema EDO de primer orden.

1. resolver $a_1(x)\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x)\partial_{x_n}u = 0$

es equivalente a buscar integrales del campo vectorial
$v = (a_1,\ldots,a_n)$
$\dot{x}_1 = a_1$, ... , $\dot{x}_n = a_n$



$*$ llamamos las curvas integrales de v las 'caractaristicas'.
se puede construir soluciones (locales) por reuiniendo caracteristicas. $*$

$n = (\nabla u, -1)$

$v.n = a_1\partial_1 u + \ldots + a_n\partial_n u - f$

2. $a_1(x,u)\,\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x,u)\,\partial_{x_n}u = f(x,u)$

el campo $v = (a_1,\ldots,a_n,f)$
sobre $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$
es tangente a las gráficas $(x,u(x))$ de soluciones.

$\dot{x}_i = a_i$; $\dot{u} = f$

3. en general, $F(x,u,\nabla u) = 0$,

Consideramos $J^1 = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (x,y,p)$ (el espacio de 1 − chorros)

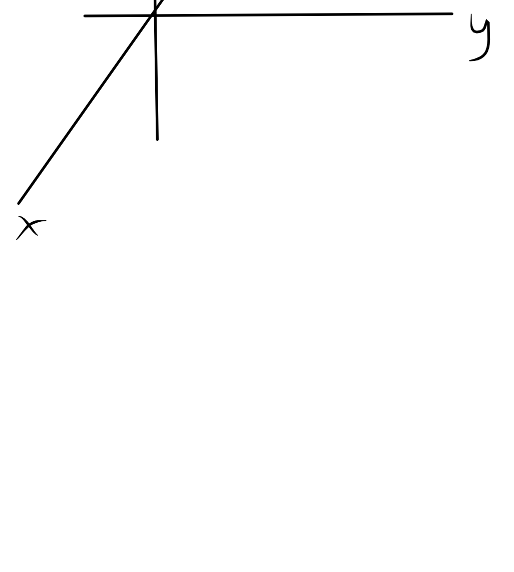
$*$ $F(x,y,p) = 0$ define una hiper superficie $\Sigma\subset J^1$

$*$ buscamos una función $u : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ cuyo 'ascensor' $\big(x, u(x), \nabla_x u\big)\subset J^1$ queda en Σ

$*$ cada ascensor de un función es tangente a los 'planos de contacto' :
$\alpha = dy - p\cdot dx = 0$

$*$ contrues un campo de lineas (dirreciones de caracteristicas) sobre Σ por :
−intersecarse el plano tangente a Σ con el plano contacto para obtener $\pi\subset T\Sigma$
−tomas el complemento ortogonal a π con respeto a $d\alpha|_{T\Sigma}$

$p = \dfrac{dy}{dx}$



El campo vectorial sobre $\Sigma\subset J^1$ que da estas caracteristicas tiene expresión :

$$\dot{x} = F_p\ ,\quad \dot{y} = p\cdot F_p\ ,\quad \dot{p} = -(F_x + pF_y)$$

$*$ para edp de primer orden que no depende de u, $F(x,p) = 0$, las caracteristicas para x,p son las ecuaciones de Hamilton :
$\dot{x} = F_p$, $\dot{p} = -F_x$.

Es dicer, si una función
$S : Q\to\mathbb{R}$
satisface la ecuación de Hamilton − Jacobi (tiempo independiente)

$$H(q, d_qS) = E = cst.$$

Entonces la gráfica

$$(q, d_qS)\subset T^*Q$$

es invariante por el flujo de X_H.