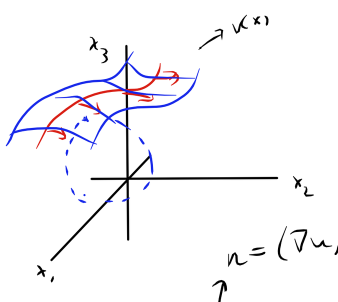
Método de caracteristicas

puede convertir una EDP de primer orden a una sistema EDO de primer orden.

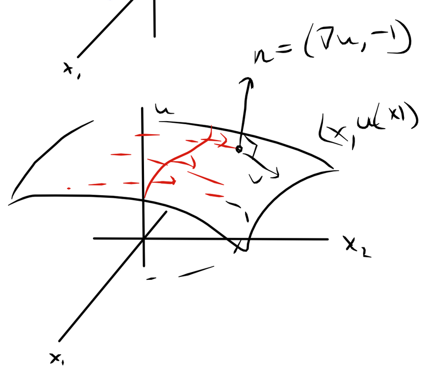
1. resolver $a_1(x)\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x)\partial_{x_n}u = 0$

es equivalente a buscar integrales del campo vectorial
$v = (a_1,\ldots,a_n)$
$\dot{x}_1 = a_1 , \ldots , \dot{x}_n = a_n$

$\mathbb{R}^n$



$*$ llamamos las curvas integrales de v las 'caractaristicas'.
se puede construir soluciones (locales) por reuiniendo caracteristicas. $*$



$v \cdot n = a_1\partial_1 u + \ldots + a_n\partial_n u - f$

2. $a_1(x,u)\,\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x,u)\,\partial_{x_n}u = f(x,u)$

el campo $v = (a_1,\ldots,a_n, f)$
sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$
es tangente a las gráficas $(x, u(x))$ de soluciones.

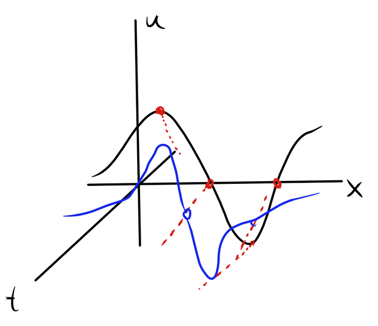
$\dot{x}_i = a_i \; ; \; \dot{u} = f$

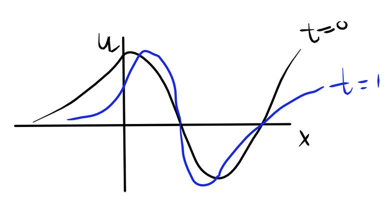
Ejemplo (ecuación de Burger) :

$u_t + u\,u_x = 0$

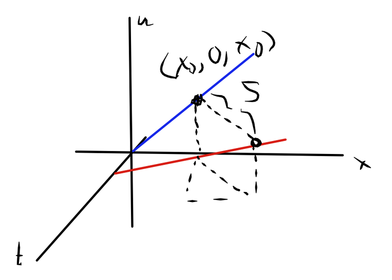
$t' = 1, \; x' = u , u' = 0$

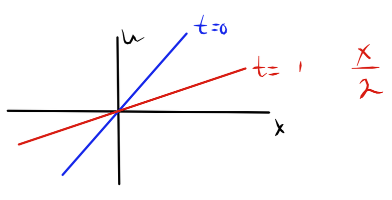
consideramos una condición incial de la forma :
$u(x,0) = f(x)$





por ejemplo, con $u(x,0) = x$





las caracteristicas con condicion inicial $(x_0, 0, f(x_0))$
son parametrizados por :

$t = s , \; x = f(x_0)s + x_0 , \; u = f(x_0)$

$x(s, x_0)$
$t(s, x_0)$
$u(s, x_0)$
$\longrightarrow$ $x_0(x,t)$, $s(x,t)$, $u(x,t)$

$x = x_0(s+1) \quad u = x_0$

$\boxed{u = \frac{x}{t+1}}$

3. en general, $F(x, u, \nabla u) = 0$,

Consideramos $J^1 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (x,y,p)$ (el espacio de $1-$chorros)

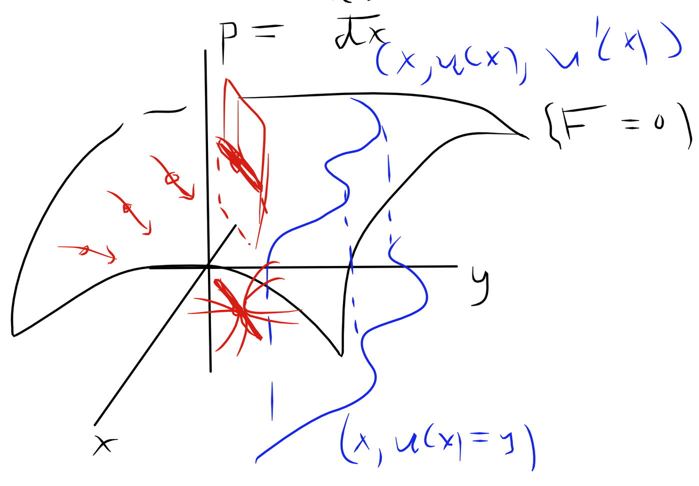
$*\, F(x,y,p) = 0$ define una hiper superficie $\Sigma \subset J^1$

$*$ buscamos una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuyo 'ascensor' $\left(x, u(x), \nabla_x u\right) \subset J^1$ queda en Σ

$*$ cada ascensor de un función es tangente a los 'planos de contacto' :
$\alpha = dy - p \cdot dx = 0$

$*$ contrues un campo de lineas (dirreciones de caracteristicas) sobre Σ por :
$-$intersecarse el plano tangente a Σ con el plano contacto para obtener $\pi \subset T\Sigma$
$-$tomas el complemento ortogonal a π con respeto a $d\alpha|_{T\Sigma}$

$p = \frac{dy}{dx}$

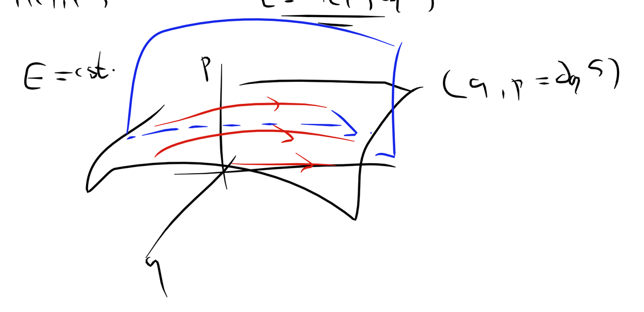


El campo vectorial sobre $\Sigma \subset J^1$ que da estas caracteristicas tiene expresión :

$\dot{x} = F_p \; , \; \dot{y} = p \cdot F_p \; , \; \dot{p} = -(F_x + pF_y)$

$*$ para edp de primer orden que no depende de u, $F(x,p) = 0$, las caracteristicas
para x,p son las ecuaciones de Hamilton :
$\dot{x} = F_p , \; \dot{p} = -F_x .$

$H(q,p)$ $\quad$ $E = H(q, \partial_q S)$



Es dicer, si una función
$S : Q \to \mathbb{R}$
satisface la ecuación de Hamilton $-$ Jacobi (tiempo independiente)

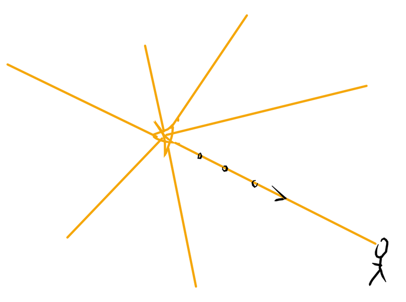
$H(q, \, d_q S) = E = cst.$

Entonces la gráfica

$(q, d_q S) \subset T^*Q$

es invariante por el flujo de X_H.

Analogía con óptica



una descripción estatica de la óptica consiste en pensar de
'lineas de vision' hacia un objecto que brilla.

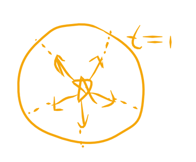
una descripción mas dinamical, es pensar de partículos libres con
velocidad constante.

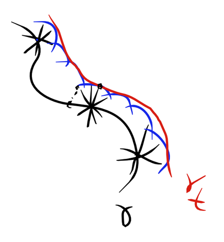
$E = L = \frac{|v|^2}{2}$, con energía fijado $(|v| = c)$ $\quad (c = 1)$

$\dot{q} = v \; , \; \dot{v} = 0$

desde la energía esta fijada, tenemos el principio variacional de Fermat :
los rayos minimizan el tiempo (longitud porque $c = cst.$)

Si la 'fuente de luz' emite partículas a un instante, so propagáran a lo largo de
una 'frontera de ondas'



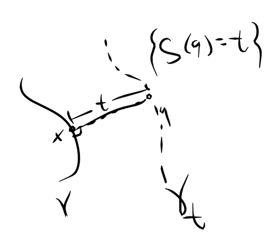


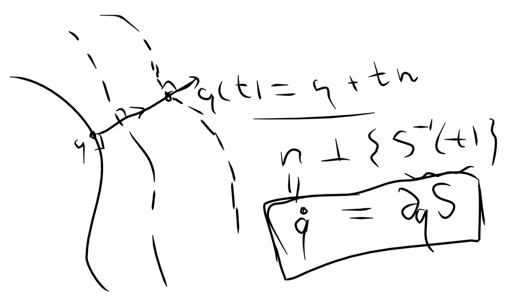
$*$ principio de Huygens : la frontera despues tiempo $t + t'$, $\gamma_{t+t'}$
es la frontera despues tiempo t' de γ_t.

γ_t es la envoltura de las fronteras por tiempo t de los puntos de γ $*$

Variacionalmente, las fronteras son los conjuntos niveles de :

$S(q) = min\{$ tiempo de x a q : $x \in \gamma\}$





$n \perp \{S^{-1}(t)\}$

$\boxed{\dot{q} = \partial_q S}$

Desde $c = cst.$, el tiempo es proporcional a distancia :

para un punto en el origen, $S(q) = |q|$
para una curva, $S(q) = dist(q, \gamma)$

Para $q(t)$ un rayo desde γ, con $q(t)$ en la frontera de onda, tenemos :

$S(q(t)) = t$
entonces

$\partial_q S \cdot \dot{q} = 1$

Observa que $\dot{q}$ y $\partial_q S$, son normal a la frontera de onda.
Tomando $c = 1$, tenemos $|\dot{q}| = 1$ y entonces

$\left|\partial_q S\right| = 1$

la ecuación eikonal (analogo a $H - J$).

En resumen, para estudiar propgación de luz por fronteras de onda. Tenemos la función, $S(q)$ que satisfice :

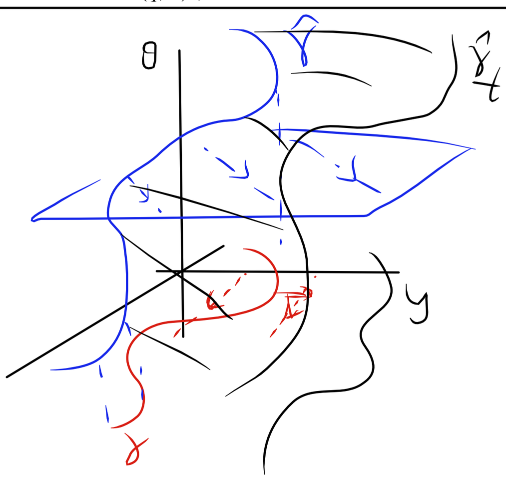
$dS = \partial_q S \, dq$, con $dS(\dot{q}) = 1$

o

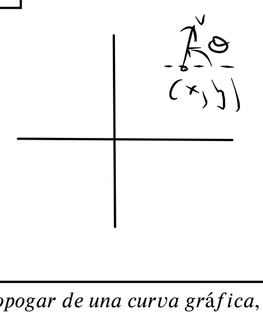
$\left|\partial_q S\right|^2 = 1.$

$\partial_q S = p = \dot{q}$

$*$ para ver este propogación más como el método de caracteristicas, se puede levantar al espacio
(q, v) , donde $|v| = 1$ $*$



el flujo es $(x,y,\theta) \mapsto (x + t\cos\theta, \; y + t\sin\theta \, , \theta)$



$c\theta\,\partial_x + s\theta\,\partial_y$

para propogar de una curva gráfica, $\gamma = (x, y(x))$, leventamoslo al

$\hat{\gamma} = (x, y(x), \theta(x))$

donde $\tan\theta(x) = -\frac{dx}{dy}$

$s\theta\,dy = -c\theta\,dx$

$(q, \theta \leftrightarrow \partial_q S)$

cont. str.

$*$ notar que hay una $1-$forma especial que caracteriza estas levantamientos :

$\alpha = \sin\theta\,dy + \cos\theta\,dx \quad (\alpha|_{\hat{\gamma}} = 0)$

el flujo es por el campo vectorial R, definido por :
$\alpha(R) = 1$
$d\alpha(R, \cdot) = 0$

$**$ $S(q) = dist(q, \gamma)$ satisface $dS = \alpha$! $**$

más preciso para cada q en una frontera de γ, tenemos
$\hat{q} = (q, \theta)$, donde θ corr. al normal de la frontera.
Entonces $d_q S = \alpha_{\hat{q}}$.

para mecánica, consideramos $S(q,t) = min\, A\{(q_o,t_o) \to (q,t)\}$

ya calculamos que :

$dS = p \cdot dq - H\,dt.$

Las caracteristicas asociados (en el espacio $-$ extendido (q, p, t)) son definidos por

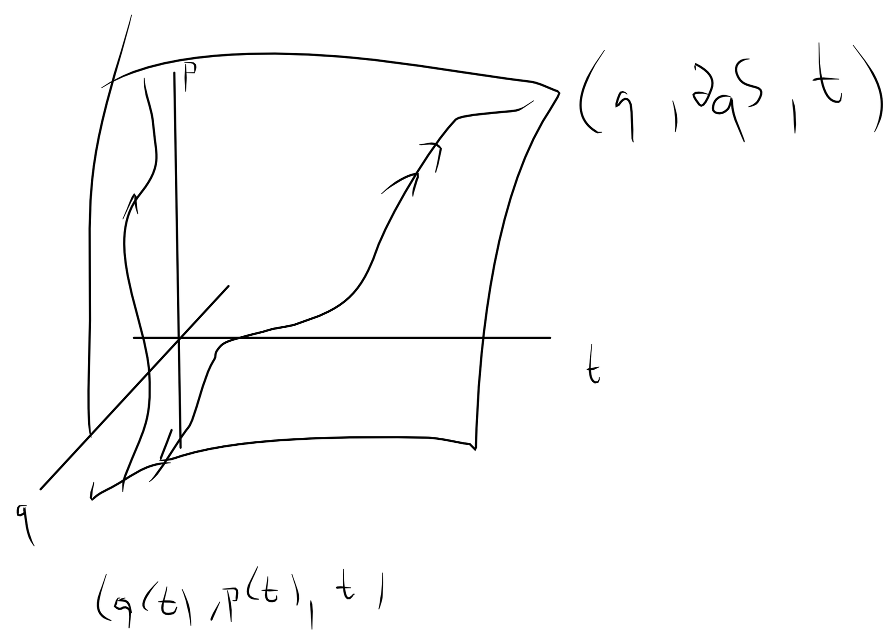
$d\alpha\,(R, \cdot) = 0$

donde $\alpha = p \cdot dq - Hdt.$

Un poco algebra lineal / diferenciación conduce a

$R = X_H + \partial_t .$

$dH = -dp \wedge dq(X_H, \cdot)$

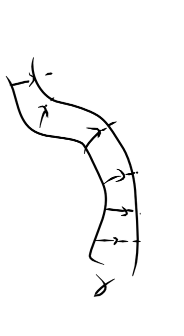


Causticas en la óptica

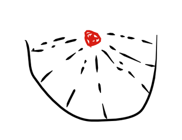
una curva γ produce fronteras de ondas parametrizada por :

$\gamma(s) + t\,n(s)$

donde $n(s)$ es el vector unitario normal por $\gamma(s)$.



donde estos rayos normales son 'acercandose uno a otro' esperamos a tener
lugares en la frontera de mas intensidad.

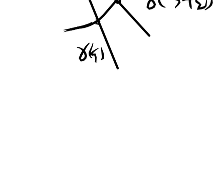


Parametrizamos γ por longitud del arco.

$\gamma'(s)$ es unitario

$\gamma''(s) = \kappa(s)\,n(s)$
donde κ es la curvatura de γ.

$n' = -\kappa\gamma'$



definimos este curva caustica por puntos en donde
'cerca' rayos normales 'intersectan' (a primer orden) :

$\gamma(s + \varepsilon) + t\,n(s + \varepsilon) = \gamma(s) + t\,n(s)$

$\cancel{\gamma(s)} + \varepsilon\gamma'(s) + \cancel{tn(s)} + t\,\varepsilon n'(s) + \cdots$

$\varepsilon \to 0 \implies \gamma'(s) - \kappa t\,\gamma'(s) = 0$

$\boxed{t = \frac{1}{\kappa(s)}}$

La caustica de γ es parametrizada por :

$\gamma(s) + \frac{n(s)}{\kappa(s)}$

es el conjunto de 'centros de curvatura' de γ,
o la envoltura de las normales a γ.