Causticas en la óptica

una curva γ produce fronteras de ondas parametrizada por :

$$\gamma(s) + t\, n(s)$$

donde $n(s)$ es el vector unitario normal por $\gamma(s)$.

donde estos rayos normales son 'acercandose uno a otro' esperamos a tener lugares en la frontera de mas intensidad.

Parametrizamos γ por longitud del arco.

$$\gamma'(s) \text{ es unitario}$$

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\, n(s)$$

donde κ es la curvatura de γ.

$$n' = -\kappa \gamma'$$

definimos este curva caustica por puntos en donde 'cerca' rayos normales 'intersectan' (a primer orden) :

$$\gamma(s+\varepsilon) + t\, n(s+\varepsilon) = \gamma(s) + t\, n(s)$$

$$\cancel{\gamma(s)} + \varepsilon\gamma'(s) + \cancel{t\, n(s)} + t\varepsilon n'(s) + \dots$$

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \gamma'(s) - \kappa t\, \gamma'(s) = 0$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\kappa(s)}}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2$$

$$(s,t) \qquad \gamma(s) + t\, n(s)$$

$$\det \phi = 0$$

La caustica de γ es parametrizada por :

$$\gamma(s) + \frac{n(s)}{\kappa(s)}$$

es el conjunto de 'centros de curvatura' de γ, o la envoltura de las normales a γ.

∗ se puede determinar la caustica para familias de rayos que no necesariamente vienen de fronteras de onda ∗

considera rayos

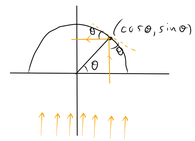
$$\gamma(s) + t\, v(s)$$

donde $v(s)$ es unitario y no necesariamente normal por $\gamma(s)$.

La caustica son los puntos criticos de la aplicación $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por :

$$(t,s) \mapsto \gamma(s) + t\, v(s)$$

Caustica en una taza :



una familia de rayos verticales se reflejan por un medio circúlo parametrizado por :

$$(\cos\theta, \sin\theta) \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

El rayo reflejado por el punto θ tiene nueva dirección :

$$(-\sin 2\theta, \cos 2\theta)$$

Las fronteras debido a estos rayos reflajados despues tiempo t son parametrizados por :

$$(\theta, t) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) + t\,(-\sin 2\theta, \cos 2\theta)$$

y la caustica producido son los puntos criticales de este mapa :

$$0 = \det\begin{pmatrix} -\sin\theta - 2t\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \cos\theta - 2t\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \sin\theta - 2t$$

$$t = \frac{\sin\theta}{2}$$

ejemplo (círculo) :

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$$

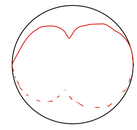
$$n(s) = -\gamma(s)$$

$$(t,s) \mapsto \gamma(s) + t\, n(s) = (1-t)\gamma(s)$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} -\gamma'(s) & (1-t)\gamma'(s) \\ \gamma'(s) & \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\det\begin{pmatrix} -\sin s & \cos(s) \\ \cos s & \sin(s) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = 1$$

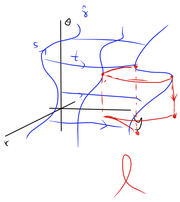


Entonces la caustica es parametrizado por :

$$(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{\sin\theta}{2}(-\sin 2\theta, \cos 2\theta)$$

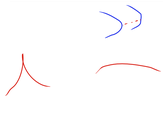
o

$$\left(\cos^3\theta, \sin\theta\left(\frac{3}{2} - \sin^2\theta\right)\right).$$ *llamado una nephroide.*



La geometría de causticas, se relaciona a la geometría de 'variedades Lagrangianas'.

Hay una clasificación de sus formas 'genericos' que toma ventaje de su relación con la estructura simplectica.
ver Arnold Appendix 12,16 o Geiges − Huygens and contact geometry (a ser subido al pagina web).



Control optimo

El escenario es un EDO :

$$\dot{x} = f(x,u)$$

que depende en unos parametros, u.
Pensamos de u como los 'controles' : nos escogen sus valores

$$u(t)$$

para controlar la evolución de x.

Tipicamente no consideramos cualquieras valores de u, pero son restricciones que a sea contenido en algún subconjunto U de $\mathbb{R}^m$. Tales $u \in U$, llamamos controles admisibles.

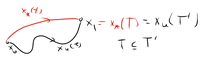
$$u(t)$$

Tratamos de encontrar 'controles optimales', dado algún función de costos de la forma :

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_u(t))\, dt$$

donde el control $u(t)$ esta definido por $t_0 \le t \le t_1$ y $x_u(t)$ es un solución de $\dot{x} = f(x, u(t))$
Queremos encontrar una 'u' que minimiza $C(u)$.

Igual como en cálculo variacional podemos considerar problemas con :
∗ tiempo fijado
∗ puntos finales fijados
∗ etc.



$$x_1 = x_u(T) = x_u(T')$$

$$T \le T'$$

Ejemplos : minimizando tiempo de viaje.

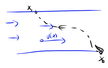
Para puntos finales x_0 y x_1 fijados, tratamos de encontrar un control

$$u_*(t) \in U \text{ , definido por } 0 \le t \le T$$

$$\text{con } x_*(0) = x_0,\ x_*(T) = x_1$$

y para que T es minimal entre todos tales trayectorias.

∗ luz
∗ barco en un rio
∗ cualquier cosa quieres hacer con prisa



por ejemplo con el barco, podemos tomar

$$u \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |u| \le 1$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

y

$$\dot{x} = v(x) + u$$

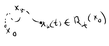
donde $v(x)$ es la velocidad del corriente por x.

En estas situaciones, tenemos analogias con fronteras. Sea :

$$R_t(x_0) := \{ \text{ todos puntos alcanzables (con controles admisibles) desde } x_0 \text{ en tiempo } \le t \}$$

entonces $R_t(x_0) \subset R_{t'}(x_0)$ para $t \le t'$.

∗ asumimos que estos conjuntos abiertos tienen fronteras suaves ∗



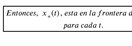
$$u(t) \quad 0 \le t \le T$$

Notar que si un punto x no es en la frontera de R_t, se puede ir de x_0 a x en tiempo $< t$.

Ahora, asumimos que $u_*(t)$, $0 \le t \le T$ es un control optimal :

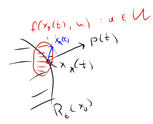
la solución de $\dot{x} = f(x, u_*(t))$ con condición inicial x_0 , $x_*(t)$, termina en x_1 − $x_*(T) = x_1$.

Ademas, el tiempo T, es minimal sobre todos curvas $x_*(t)$ de x_0 a x_1.



Entonces, $x_*(t)$, esta en la frontera de $R_t(x_0)$ para cada t.

$$\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t))$$



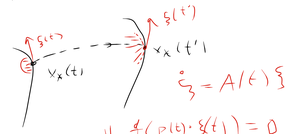
Deja que $p(t)$ sea el normal a la frontera de $R_t(x_0)$ por $x_*(t)$.

Todos los velocidades posibles son :
$f(x_*(t), u)$ *t.q.* $u \in U$

La velocidad optimal, $\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t))$, esta huyendo de la frontera $R_t(x_0)$ lo más rápido posible.
Es decir, en cada instante t tenemos :

$$f(x_*(t), u_*(t)) \cdot p(t) \ge f(x_*(t), u) \cdot p(t) \qquad \forall u \in U.$$

$$\dot{x} = f(x, u_*(t))$$



$$\dot{\xi} = A(t)\,\xi$$

$$\frac{d}{dt}(p(t)\cdot\xi(t)) = 0$$

Que $p(t)$ siempre esta normal a la frontera por $x_*(t)$ traduce a la siguiente EDO que satisfice p :

$$\dot{p} = -df_x(x_*(t), u_*(t))^T p = -A^T(t)\, p \quad *$$

Ejemplo (barco en rio con flujo constante) :

$$\dot{x} = v + u$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ v \text{ fijado, } |u| \le 1.$$

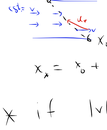
$$f(x,u) = f(u) \Rightarrow \dot{p} = 0 \qquad (d_x f = 0)$$

$$\Rightarrow p = \text{cst.}$$

$$(\cancel{v} + u_*(t))\cdot p \ge (\cancel{v} + u)\, p \qquad \forall |u| \le 1$$

$$u_*(t)\cdot p \ge u \cdot p$$

$$\Rightarrow u_* = \frac{p}{|p|} = \text{cst.}$$



$$x_* = x_0 + t\,(v + u_*)$$

[∗ if $|v| > 1$
can't go upstream ∗]

Principio maximo de Pontryagin

Comenzamos por reescribiendo el siguiente problema de control óptimo :

$$\dot{x} = f(x,u) \quad u \in U$$

$$C(u) = \int L(t, x_u)\, dt$$

usando multiplicadores de Lagrange.

Tomamos

$$\hat{L}(t,x,\dot{x},p,u) := L(t,x) + p\cdot(\dot{x} - f(x,u))$$

$$x \mapsto \int \hat{L}(t,x,\dot{x},p,u)\, dt$$

∗ una curva minimal de p.c.o. es una extremal de $\hat{L}$ para algún $p(t)$. ∗

La Hamiltoniana asociada es :

$$H = \partial_{\dot{x}}\hat{L}\,\dot{x} - \hat{L}$$
$$= p\cdot\dot{x} - \hat{L} = p\cdot f(x,u) - L(t,x)$$

Las extremales de $\hat{L}$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton :

$$\dot{x} = \partial_p H = f(x,u)$$

$$\dot{p} = -\partial_x H = \partial_x L(t,x) - df_x^T\, p$$

∗ En control buscamos minimizadores del $C(u)$. ∗

Más condiciones necesarios en problemas variacional para minimizadores uno puede encontrar por tomando segundo derivada (segundo variación).

Esto es, para $\gamma \mapsto A(\gamma)$, si γ_* es un minimizador entonces :

1. $\delta A_{\gamma_*}(\delta\gamma) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} A(\gamma_\varepsilon) = 0$ *para cada variación γ_ε de γ_*.*

2. $\delta^2 A_{\gamma_*}(\delta\gamma) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} A(\gamma_\varepsilon) \ge 0$ *para cada variación γ_ε de γ_*.*

Un 'local' principio de Pontryagin, sigue de aplicando este prueba de segundo variación a nuestro problema de control óptimal y traduciendo a forma Hamiltoniana. Resulta que :

Si $u_*(t)$ con correspondiente $x_*(t)$ es óptimal entonces :

Existe una $p_*(t)$ resolviendo $\dot{p}_* = -\partial_x H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t))$ para que

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t)) \ge H(t, x_*(t), u, p_*(t)) \quad \forall u \in U \text{ cerca de } u_*(t).$$

La principio de Pontryagin quita est condición de u cerca de $u_*(t)$:

Si $u_*(t)$ con correspondiente $x_*(t)$ es óptimal, entonces :

Existe una $p_*(t)$ resolviendo $\dot{p}_* = -\partial_x H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t))$ para que

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p_*(t)) \ge H(t, x_*(t), u, p_*(t)) \quad \forall u \in U.$$

Created with iDroo.com