Corchetes de Poisson

Recordamos :

$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, *es una Hamiltoniana*

$\omega = dp \wedge dq$ *es la forma simplectica*

la dínamica es por $\dot{x} = X_H$ *donde* X_H *es el gradiente simplectica de* H :

$$dH(\cdot) = -\omega(X_H, \cdot)$$

$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

$df(\cdot) = -\omega(X_f, \cdot)$

$*$ *podemos tomar el gradiente simplectica,* X_f, *de cualquiera función* $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

Un primer integral de X_H *es una función* f *para que* :

$$df(X_H) = 0$$

$\frac{d}{dt}\Big|_0 f(x(t)) = d_x f(X_H)$

$x(0) = x \qquad \dot{x} = X_H$

Es decir,

$$0 = df(X_H) = -\omega(X_f, X_H) =: \{f, H\}$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ *son las corchetes de Poisson.*

$C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$(f, g) \longmapsto df(X_g) = \{f, g\}$.

ϕ^t sim. of H

f int.

$H(\phi^t(x)) = H(x)$

Propiedades :

$*$ *anti − simétrico* $\{f,g\} = -\{g,f\}$
$*$ *bilineal* $\{f_1 + c f_2, g\} = \{f_1, g\} + c\{f_2, g\}$

Observemos que si $\{f,H\} = 0$ *entonces* $\{H,f\} = 0$.

Primer integrales corresponden a simetrías.

(*Teorema de Noether forma Hamiltoniana*)

Ejemplo (problema planar de Hooke) :

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2}{2}, \quad dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy$$

y, $(-y, x) = X$, x

$*$ *con la 'media' teorema de Noether, tenemos simetría por rotaciones* :

$$z = x + iy \mapsto e^{i\theta} z$$
$$w = p_x + i\,p_y \mapsto e^{i\theta} w \quad (\textit{levantamiento por regla de cadenas})$$

que conduce al integral de momento angular, $C = w \cdot iz$.

$\partial_v L \cdot X = (v_x, v_y) \cdot (-y, x)$

$= w \cdot iz = a.m.$

"lifts"

$(q, p) \longmapsto (Q(q), P(p, q))$

$\left[(q, p) \longmapsto (Q(q, p), P(p, q))\right]$

HIDDEN SYMM'S.

$\partial_{p_x} f = \dot{x} = -y \qquad \dot{p}_x = -p_y = -\partial_x f$

$\partial_{p_y} f = \dot{y} = x \qquad \dot{p}_y = p_x = -\partial_y f$

$f = x p_y - y p_x \quad$ a.m

Rotación del plano (p_x, x) *es una simetría de* H.
Buscamos una función g *para que este rotación es el flujo del gradiente simplectica de* g :

$$\dot{p}_x = -x = -\partial_x g$$
$$\dot{x} = p_x = \partial_{p_x} g$$

$g = \frac{p_x^2 + x^2}{2} \qquad 1^{st}$ int.

$*$ *dado un campo vectorial,* X, *se corresponde al gradiente de algún función cuando su flujo preserva* ω, *es decir* $L_X \omega = 0$ $*$

$-\iota_X \omega = df \iff d\iota_X \omega = 0$ (Poin. Lem.)

$d\iota_X\omega = L_X \omega - \iota_X d\omega$

Expresión en coordenadas

Cálculamos :

$$\{f, g\} = \partial_q f \cdot \partial_p g - \partial_p f \cdot \partial_q g = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

$\{f, g\} = df(X_g) = \nabla f \cdot X_g = \begin{pmatrix} \partial_q f \\ \partial_p f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p g \\ -\partial_q g \end{pmatrix}$

$X_g = -J \nabla g$

$J = \begin{pmatrix} & -I \\ I & \end{pmatrix}$

ejemplos :

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & o/w \end{cases}$

$H = p_j \quad \left[\dot{q}_1 = 0, \ldots, \dot{q}_j = 1, \ldots \right.$ others all 0

$\{q_i, p_j\} = 1$

$\{*, p_i\} = 0 \quad o/w$

Podemos calcular otras corchetes con reglas de producto / cadena

$$\{q_1 q_2, p_2\} = q_1$$
$$\{q_1^2, p_1 + p_2\} = 2q_1$$
$$\left\{\sin q_1, p_1\right\} = \cos q_1.$$

$q_1\{q_2, p_2\} = q_1(q_1\{q_2, p_2\} + q_2\{q_1, p_2\})$

$\{q_1^2, p_2\} = 0 \qquad \frac{d}{dt} q_1(t)^2 = 2q_1\{q_1, p_1\}$

Cambias de variables

Recordamos que para un cambio de variable :

$$x = \phi(y)$$

$$\dot{x} = d_y \phi\, \dot{y}$$

$$d_y\phi^T\, \nabla_x H = \nabla_y H$$

$\dot{x} = -J \nabla_x H \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$J\dot{x} = \nabla_x H$

$A^T J \dot{x} = \nabla_y H$

$\Rightarrow \; A^T J A \dot{y} = \nabla_y H, \;$ *con* $A = d_y \phi$

skew-sim. $(J^T = -J)$

Para $y = (y_1, \ldots, y_{2n})$ *ponemos*

$(y_i, y_j) :=$ *entrada de* $A^T J A$ *en fila i y columna j.*

Estos son llamadas las parentesis de Lagrange.

Entonces, $(y_i, y_j) = -(y_j, y_i)$, *y*

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = (y_1, y_k)\,\dot{y}_1 + \ldots + (y_{2n}, y_k)\,\dot{y}_{2n}$$

1808 (Lagrange)

1833 (Ham.)

$A^T J A = J$

$*$ *la tranformación es simplectica cuando* :

$(y_j, y_{j+n}) = 1$ *para* $1 \leq j \leq n$, *otros cero.*

que es equivalente a :

$$\dot{y}_j = \frac{\partial H}{\partial y_{j+n}}$$
$$\dot{y}_{j+n} = -\frac{\partial H}{\partial y_j}$$

$*$ *notar que las parentesis de Lagrange son (menos) las coefficientes de* $\omega = dp \wedge dq$ *en las nuevas variables. Es decir por reemplazo* $p(y), q(y)$ *para obtener*

$$dp \wedge dq = -(y_1, y_2)\, dy_1 \wedge dy_2 - (y_1, y_3)\, dy_1 \wedge dy_3 - \ldots$$

Los corchetes de Poisson tienen un interpretación similar. Son menos las entradas del inverso de la matriz que da las parentesis de Lagrange.

Escribimos :

$$\dot{y} = -B\, \nabla_y H$$

Entonces

$\{y_i, y_j\} =$ *entrada en fila i y columna j de B.*

En particular,

$$\dot{y}_j = \{y_j, y_1\}\frac{\partial H}{\partial y_1} + \ldots + \{y_j, y_{2n}\}\frac{\partial H}{\partial y_{2n}}.$$

$\{y_i, y_j\} = -\{y_j, y_i\}$

$*$ *la transformación es simplectica cuando* :

$\{y_{j+n}, y_j\} = 1, \; 1 \leq j \leq n,$ *otros cero.*

Sigue de la regla de cadena escribido con corchetes de Poisson :

$$\dot{y}_j = \{y_j, H\} = \{y_j, y_1\}\frac{\partial H}{\partial y_1} + \ldots + \{y_j, y_{2n}\}\frac{\partial H}{\partial y_{2n}}$$

$\{y_j, H\} = -\{H, y_j\}$

$= -\frac{d}{ds}\Big|_0 H(y_1(s), \ldots, y_{2n}(s))$

$= -\left(\partial_{y_1} H \cdot \{y_1, y_j\} + \ldots + \partial_{y_{2n}} H\{y_{2n}, y_j\}\right) \quad \square$

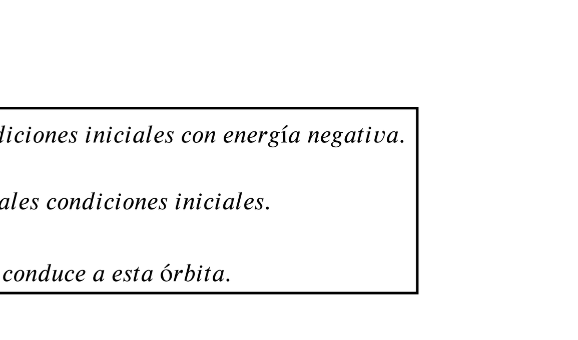
Elementos de la órbita (problema planar de Kepler)

$*$ neg. energy = ell. orb's $*$

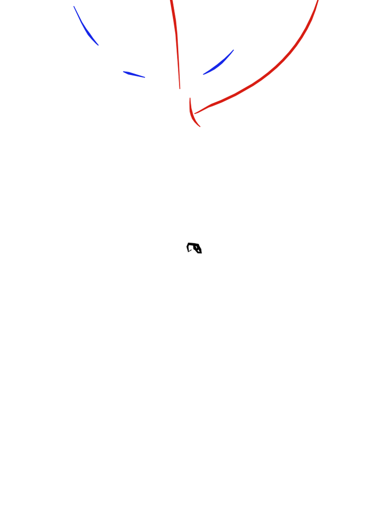
para describir una órbita de un planeta alrededor del Sol, los astronomos usan los 'elementas de la órbita' :

$$a, e, g, t$$

a es el semi − eje mayor, e la eccentricidad,
g el 'argumento del pericentro', t el 'tiempo desde pericentro'



$(q, p) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0 \times \mathbb{R}^2$



Estos elementos sirven para coordenadas, en el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ *de condiciones iniciales con energía negativa.*

Dado (q_o, p_o) *asignamos los elementos de la solución con tales condiciones iniciales.*

Dado (a, e, g, t) *asignamos la posición y velocidad que conduce a esta órbita.*

Ecuaciones de movimiento para el problema de Kepler en estas cordenadas son :

$$\dot{a} = \dot{e} = \dot{g} = 0$$
$$\dot{t} = 1.$$

Lagrange he considerada una función perturbador,

$$\Omega(a,e,g,t).$$

El escribe las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas de la forma :

$$\partial_a \Omega = (a,e)\; e' + (a, g)\; g' + (a,t)\; t'$$
$$\partial_e \Omega = (e, a)\; a' + (e, g)\; g' + (e, t)\; t'$$
$$etc.$$

y observe que hay anti − simetría en con estas coeficientes! e.g. $(a,e) = -(e,a)$, *etc.*
Ahora sabemos, estaba escribiendo la forma simplectica (anti − simétrica) en estos coordenadas astronómical.