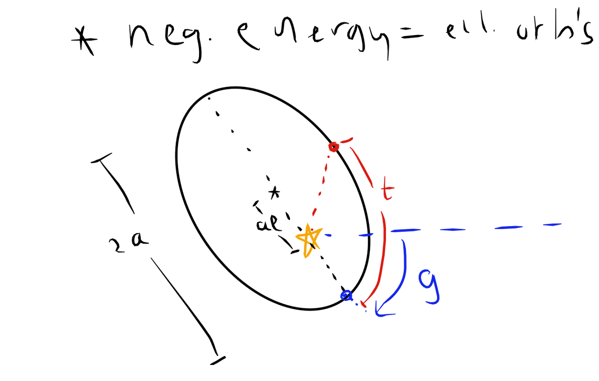
* neg energy = ell orbits *



$$\dot y_j = \{y_j, y_1\}\frac{\partial H}{\partial y_1} + \dots + \{y_j, y_{2n}\}\frac{\partial H}{\partial y_{2n}}$$

Coordenadas de Delaunay (coordenadas simplecticas en el problema de Kepler)

Recordamos :

- $H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|q|} = -\frac{1}{2a}$
- $C^2 = (q \cdot ip)^2 = a(1-e^2)$

$T^2 = 4\pi^2 a^3$

el área crece uniformamente con ritmo $\frac{C}{2}$.

Vamos a determinar nuevos variables (cordenadas de Delaunay)

L, G, ℓ, g

en lugar de los elementos a, e, g, t.

Estos variables van a estar simpleticas :

$dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = dL \wedge d\ell + dG \wedge dg.$

Ademas, H *depiende solo en* L.

(alt. H-J eq'n sep. of var's)

$H(L) + \varepsilon\Omega(L, G, \ell, g)$

$\dot L = -\varepsilon\partial_\ell \Omega \quad \dot\ell = H'(L) + \varepsilon\partial_L\Omega$

$\dot G = -\varepsilon\partial_g \Omega \quad \dot g = \varepsilon\partial_G\Omega$

En lugar de los elementos a, e *tomamos*

$H, C.$

Entonces :

$\{C, H\} = 0$

El argumento del pericentro, g*, también queda constante bajo el flujo de* H *entonces :*

$\{g, H\} = 0$

Desde el gradiente simplectica de C *genera rotaciones, tenemos :*

$\{g, C\} = 1$

Desde t *es el tiempo bajo el flujo de* H*, tenemos :*

$\{t, H\} = 1.$

Rodeando una órbita no cambio el tiempo hacía pericentro, entonces :

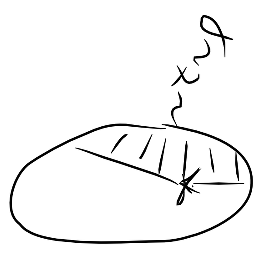
$\{t, C\} = 0.$

$\{t, g\} = 0\ ?$

Desde el área crece uniformamente, reescalemos t *por un variable* ℓ *:*

$$\ell(t) = 2\pi\frac{\text{área}(t)}{\text{área}(ell)}$$

entonces $\ell \in [0, 2\pi]$ *es como un ángulo.*



$\ell = \frac{2\pi C t}{2\pi a b} = a^{-3/2} t$

$C = \sqrt{a(1-e^2)} \quad b = a\sqrt{1-e^2}$

Desde $a(H)$*, tenemos todavía* $\{\ell, C\} = 0$.

Para determinar la L *corespondiente, queremos*

$L(H)$ *tal que*

$1 = \{\ell, L\} = \{t, H\}$

$1 = \{\ell, L(H)\} = \{a^{-3/2} t, L(H)\} = a^{-3/2}\{t, L(H)\} = a^{-3/2} L'(H)\{t, H\}$

Resulta que $L(H)$ *satisface la EDO :*

$$\frac{dL}{dH} = a^{\frac{3}{2}} = (-2H)^{-\frac{3}{2}}$$

entonces,

$$L = \frac{1}{\sqrt{-2H}},\ o$$

$$H = -\frac{1}{2L^2}.$$

$L = \sqrt{a}$

Ahora, debido a que H *solo depende de* L*, las ecuaciones de movimiento son :*

$$\dot L = -\partial_\ell H = 0$$
$$\dot G = -\partial_g H = 0$$

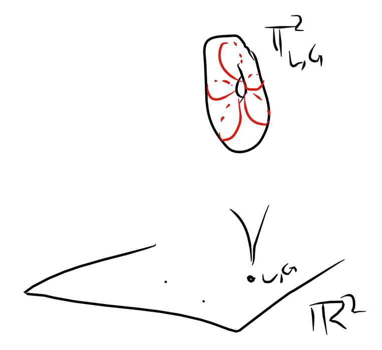
$$\dot\ell = \partial_L H + \{\ell, g\}\,\partial_g H = \partial_L H$$
$$\dot g = \partial_G H + \{g, \ell\}\partial_\ell H = 0$$

donde ponemos $G = C$.

$(L, G) \in \mathbb{R}^2$

$(\ell, g) \in S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$



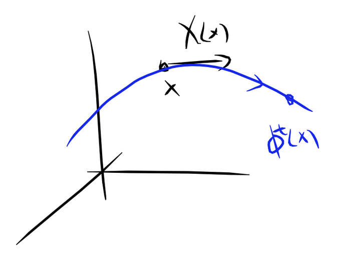
* *queda calcular* $\{\ell, g\}$*, lo que permite escribir las ecuaciones de movimiento con la función perturbativa.* *

Corchetes de Lie

Consideramos dos campos vectoriales X, Y *sobre* $\mathbb{R}^n$,

$X, Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$

Sea ϕ^t, ψ^s *los flujos de* X, Y *resp.*



Notación :

Podemos pensar de X *como un operador sobre funciones :*

para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tenemos la función (derivada direcional),

$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto d_x f(X) \in \mathbb{R}$

que escribimos como

$Xf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$

Escrito por componentes, $X = (X_1, \dots, X_n)$,

$Xf = X_1\partial_{x_1} f + \dots + X_n\partial_{x_n} f$

A menudo vees la notación

$X = X_1\partial_{x_1} + \dots + X_n\partial_{x_n}$ *para* X.

Igual para una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ponemos*

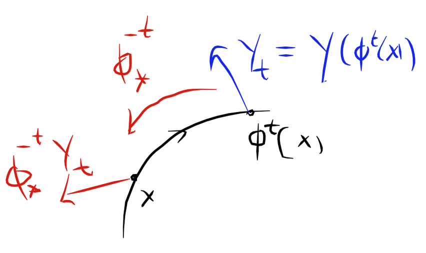
$XF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

para $x \mapsto d_x F(X)$

Para medir como el campo vectorial Y *cambia bajo el flujo de* X*, consideramos el campo vectorial :*

$$L_X Y := \frac{d}{dt}_{t=0} \phi_*^{-t}\, Y_t$$

llamada derivada de Lie de Y *a lo largo de* X.



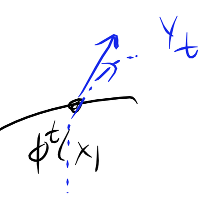
$f_*(v) = d_x f(v) = \frac{d}{ds}\Big|_0 f(\gamma(s)) \quad \gamma(0) = x,\ \dot\gamma(0) = v$

Para derivar una formula más explicita para la derivada de Lie, consideramos por un punto $x \in \mathbb{R}^n$ *:*

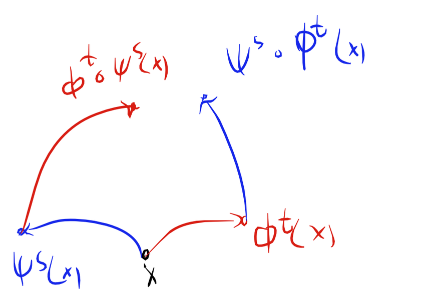
$$\left(\phi_*^{-t} Y_t\right)(x) = \frac{d}{ds}_{s=0}\phi^{-t}(\psi^s(\phi^t(x))) = \frac{d}{ds}_{s=0}\phi^{-t}\circ\psi^s\circ\phi^t(x).$$

Entonces,

$$L_X Y(x) = \frac{d^2}{dtds}_{t=s=0}\phi^{-t}\circ\psi^s\circ\phi^t(x)$$



$\psi^s(\phi^t(x))$



* $L_X Y = 0 \iff \psi^s \circ \phi^t = \phi^t \circ \psi^s$ *

Por expansión de Taylor, llegamos a :

$$\phi^{-t}\circ\psi^s\circ\phi^t(x) = x + sY(x) + st\,(d_x Y(X) - d_x X(Y)) + O(t^2, s^2)$$

$$\Rightarrow L_X Y(x) = d_x Y(X) - d_x X(Y)$$
$$= XY(x) - YX(x)$$

o

$$L_X Y = XY - YX =: [X,Y]$$

que también llamamos el corchete de Lie de X *con* Y.

* $\phi^\tau(p) = p + \tau X(p) + O(\tau^2)$ *

En coordenadas, $L_X Y$ *tiene el* $k-$*componente egal a :*

$$XY_k - YX_k =$$
$$X_1\partial_1 Y_k + \dots + X_n\partial_n Y_k - Y_1\partial_1 X_k - \dots - Y_n\partial_n X_k$$

$X = X^j\partial_j = X^1\partial_1 + \dots + X^n\partial_n$

$[X, Y] = (X^j\partial_j Y^k - Y^j\partial_j X^k)\partial_k$

$\{f, g\} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$

Relación con corchetes de Poisson y la identidad de Jacobi

para $f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$*. Tenemos :*

* *su corcheta de Poisson,* $\{f,g\}$ *con gradiente simplectica* $X_{\{f,g\}}$

* *sus gradientes simplecticas,* X_f, X_g *con corchete de Lie,* $[X_f, X_g]$

Entonces :

$\dot{\ast} \quad X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f].$

dem :

1. $\{f,g\} = -\omega(X_f, X_g) = i_{X_f} i_{X_g}\omega$

2. *Con Cartan,*
$d\{f,g\} = d(i_{X_f}(i_{X_g}\omega)) = L_{X_f} i_{X_g}\omega - i_{X_f} d(i_{X_g}\omega)$
$= L_{X_f} i_{X_g}\omega.$

3. *Invocamos la identidad general :* $L_X i_Y \alpha = i_{[X,Y]}\alpha + i_Y L_X\alpha$,
$\Rightarrow d\{f,g\} = i_{[X_f, X_g]}\omega + i_{X_g} L_{X_f}\omega$
$= -i_{[X_g, X_f]}\omega$

$\Rightarrow X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f].$

$\omega(X_g, X_f)$

$(d\{f,g\} = -i_{X_{\{f,g\}}}\omega)$

$i_{X_g}\omega = -dg \quad (d^2 = 0)$

$L_{X_f}\omega = 0$ (cartan)

Obtenemos la identidad de Jacobi para Corchetes de Poisson :

* $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$. *

para cualquier $f, g, h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.

dem :

1. $\{\{f,g\},h\} = d\{f,g\}(X_h) = X_h\{f,g\} = X_h X_g f$

Ahora vamos a escribir los restantes terminos como operadores actuando por f *:*

2. $\{\{g,h\},f\} = -\{f,\{g,h\}\} = -[X_h, X_g]f$

3. $\{\{h,f\},g\} = -X_g\{f,h\} = -X_g X_h f$

4. *Juntos, tenemos* $[X_h, X_g]f - [X_h, X_g]f = 0.$

$-X_{\{g,h\}}f$

$((X_h X_g - X_g X_h) - [X_h, X_g])f$

Un consecuencia imediata es si f,g *son integrales de* H*, entonces también es* $\{f,g\}$ *un integral de* H.

$\{f, H\} = \{g, H\} = 0$

$\{\ell, g\} = 0$

Desde la identidad de Jacobi :

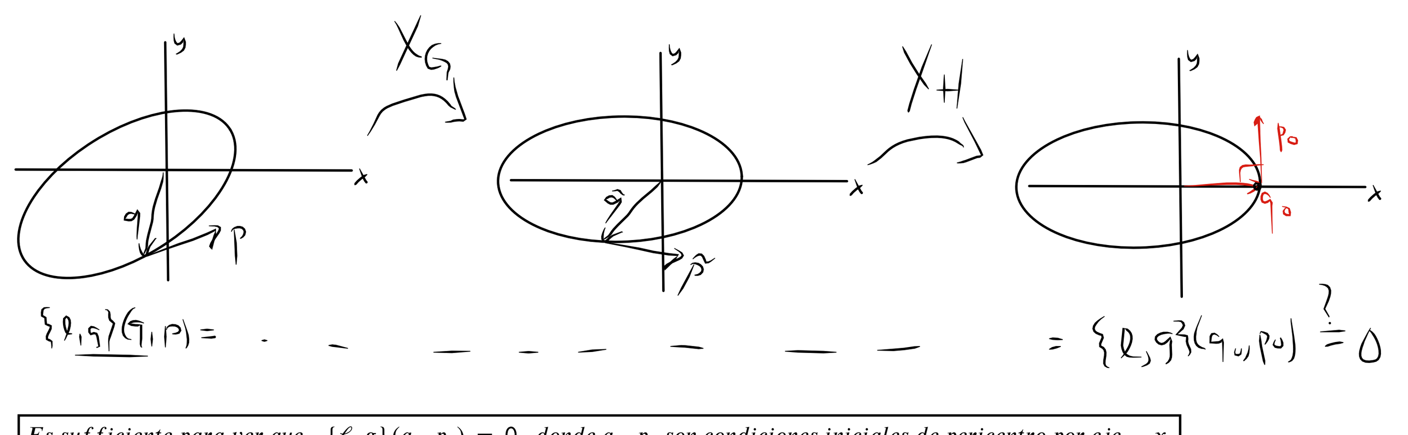
$$\{\{\ell, g\}, L\} + \{\{\overset{0}{\cancel{g}, L}\}, \ell\} + \{\{\underset{1}{L, \cancel{\ell}}\}, g\} = 0$$

$\Rightarrow \{\ell, g\}$ *es constante bajo* X_L *(y* X_H*).*

Similarmente,

$\{\ell, g\}$ *es constante bajo* X_G *(rotaciones)*

$(G = C)$



$\{\ell, g\}(q, p) = \cdots = \{\ell, g\}(q_0, p_0) \overset{?}{=} 0$

Es sufficiente para ver que $\{\ell, g\}(q_o, p_o) = 0$ *donde* q_o, p_o *son condiciones iniciales de pericentro por eje* $-x$.

Usamos la expresión en coordenadas :

$$\{\ell, g\} = \frac{\partial\ell}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p_x} + \frac{\partial\ell}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial p_y} - \frac{\partial\ell}{\partial p_x}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial\ell}{\partial p_y}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Observa que, por (q_o, p_o) *:*

* *en variar* x, ℓ *y* g *quedan constante (cero), entonces* $\frac{\partial\ell}{\partial x}(q_o, p_o) = \frac{\partial g}{\partial x}(q_o, p_o) = 0$

* *en variar* p_y *también* ℓ *y* g *quedan constante (cero), entonces* $\frac{\partial\ell}{\partial p_y}(q_o, p_o) = \frac{\partial g}{\partial p_y}(q_o, p_o) = 0.$

$\Rightarrow$ *por todos puntos,* $\{\ell, g\} = 0.$