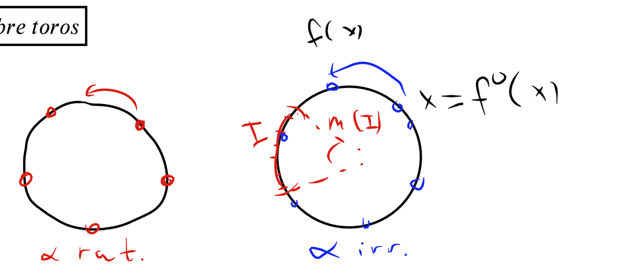
## *Dinámica sobre toros*




1. *Consideramos una rotación por angúlo $\alpha$ de un circúlo :*
$f : \theta \mapsto \theta + \alpha$

*conduce a una dinámica discreta, por iteraciones de la aplicación*

$*$ *si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ entonces todos órbitas son periodicos*
$*$ *si $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ las órbitas son densos por el circulo*

*cuando $\alpha$ es iracional, las órbitas son repartidos uniformamente sobre el circulo :*

$$m(I) = \lim_{k\to\infty} \frac{\#\{ f^n(x) \in I,\ 0 \le n \le k\}}{k}$$

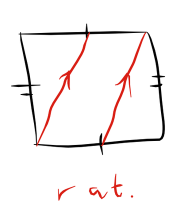
2. *Consideramos un flujo lineal por $\mathbb{T}^2$ :*

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta + t\,\omega$$

*donde $\omega = (\omega_1, \omega_2)$*

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{k_1}{k_2} \iff k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$$

$*$ *si el pendiente es racional, todas órbitas son periodicas*
$*$ *se el pendiente es iracional, todas órbitas son densos por $\mathbb{T}^2$*




*En general, la dinámica de un flujo lineal por un toro, $\mathbb{T}^n$, depende de resonancias :*
$$\theta(t) = \theta_o + t\,\omega$$

*los vectores $k \in \cancel{\mathbb{Z}}^n$ para que $k \cdot \omega = 0$.*

$\mathbb{Z}^n \setminus 0$

no res.

*Las órbitas de flujos iracionales : $k \cdot \omega = 0$ solo cuando $k = 0$, son repartidos uniformamente sobre el toro.*

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)\, d\theta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta_o + t\omega)\, dt$$

*cualquier función $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$.*

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ik\cdot\theta} \qquad 0 = \int_{\mathbb{T}^n} e^{ik\cdot\theta}\, d\theta \ \Big|\ \int_0^T e^{ik\cdot\theta_0} e^{ik\cdot\omega t}\, dt = \frac{e^{ik\cdot\theta_0}}{ik\cdot\omega}e^{ik\cdot\omega t}\Big|_0^T$$

$$\left[\text{IF } k\cdot\omega = 0 \qquad \frac{1}{T}\, T e^{ik\cdot\theta_0} = e^{ik\cdot\theta_0} \neq 0 \right] \qquad \frac{e^{ik\cdot\theta_0}}{ik\cdot\omega T}\left(e^{ik\cdot\omega T} - 1\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

---

## *Problema general de la dinámica*

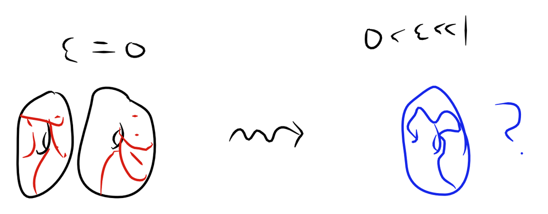
$dI \wedge d\theta$

*Considera una sistema mecánica con Hamiltoniana de la forma :*

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta) + \varepsilon^2 H_2(I, \theta) + \ldots$$

*donde $\varepsilon$ es un 'pequeño parametro'.*

*¿Que aspetos de la dinámica integrable $(\varepsilon = 0)$ sobreviven para $0 < \varepsilon \ll 1$ ?*




*por ejemplo, el problema 'planetario' de $n-$cuerpos puede ser presentado en este forma.*

*$n$ masas puntuales con masas 'pequeno' relativo a la masa del sol ($m_S = 1$)*

$$\varepsilon m_1, \ \ldots, \varepsilon m_n$$

*conduce a*
*$H_0(I)$ la Hamiltoniana de $n$ problemas de Kepler descopladas.*


ε = 0
only sun
→ Kepler probs

---

## *Reducción simplectica (Marsden – Weinstein – Meyer)*

$*$ *primer integrales reducen el dimensión por restricción a conjuntos niveles*

$*$ *simetrías reducen el dimensión por pasando a un espacio quotiente*

$|q \sim e^{i\theta} q|$

*Dado una sistema, $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, llamamos una simetría un aplicación*

$$\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

*para que*

$$H \circ \phi = H, \ y \ \phi^*\omega = \omega.$$

*Las simetrías de $H$ son un grupo, $G$.*

*Puede ser un grupo de Lie, p.ej. $SO_3$*

$\{F, H\} = 0$
$\iff \{H, F\} = 0$

*Consideramos una curva de simetrías, $\phi_t \in G$, pasando por le identidad $\phi_0 = id$.*

*Tal curva genera una simetría infinitesimal, el campo vectorial :*

$$X_\phi(x) = \frac{d}{dt}_{t=0} \phi_t(x) = X_\xi(x)$$

$$\text{donde } \xi = \frac{d}{dt}_{t=0} \phi_t \in \mathfrak{g}$$

$J(x) \in \mathfrak{g}^*$
$J(x) \cdot \xi = f_\xi(x) \in \mathbb{R}.$

*Para relacionar las simetrías con integrales, queremos saber :*

*¿ Es $X_\xi$ un gradiente simplectica de algún función ?*

*Es decir si podemos encontrar una función $f_\xi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$-i_{X_\xi}\omega = df_\xi$$

*Si es posible asociar las simetrías con integrales, obtenemos una 'aplicación de momentos'*

$$J : M \to \mathfrak{g}^*$$

*donde ponemos $M (= \mathbb{R}^{2n})$*

*Teorema de reducción simplectica :*

*Dado $M, \omega, H, G$ si existe un aplicación de momentos*

$$J : M \to \mathfrak{g}^*$$

*que es equivariante,*

$$J(g \cdot x) = Ad^*_{g^{-1}} J(x)$$

*Entonces para $\mu \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular de $J$, el espacio quotiente*

$$P_\mu = \frac{J^{-1}(\mu)}{G_\mu}$$

*es simplectica y el flujo de $X_H$ proyecta al flujo de una gradiente simplectica de una Hamiltoniana sobre $P_\mu$.*

$G_\mu = \{ g \in G : J(g \cdot x) = \mu \}$
$J(x) = \mu$

* App. 5 in Arnold. *

---

## *Ejemplos*

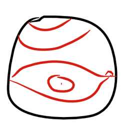
1. *Levantamientos. Para $M = T^*Q$ (p.ej. $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$) una acción de simetrías $G$ sobre $Q$ levanta a actuar sobre $T^*Q$.*

*La aplicación de momentos por $J_\xi(x) = p \cdot X_\xi$ es equivariante.*

1st NOETHER $\quad \partial_v L \cdot X$

2. *Cuerpos rígidos libres. $M = T^*SO_3$*

$6\text{-dim.} \xrightarrow{J = cst.} 3\text{-dim.} \xrightarrow{quot.} 2\text{-dim.}$



$G = SO_3$
$J : M \to so_3^*$ (ang. mom.)
3-dim

3. *masas puntuales*

$q \in \mathbb{C}^3 \setminus \Delta$

$T^*\mathbb{C}^2 \setminus \Delta \xrightarrow{C = cst.} 7\text{-dim.} \xrightarrow{quot.} 6\text{-dim.}$
8-dim.
↓ const
7-dim.

---

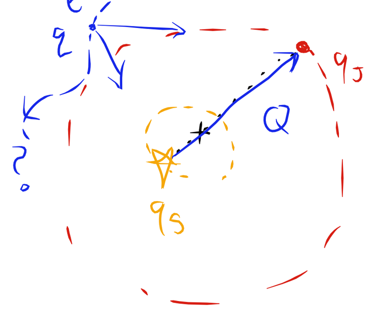
## *Problema restringido circular y planar de 3 – cuerpos (RC3BP)*

(planar)

*Consideramos los movimientos de un objeto 'pequeño' como un satelite o asteroide bajo la influencia de dos primarias 'grandes' como la tierra y luna o el sol y Júpiter.*

$*$ *ignoramos la influencia del objeto pequeño sobre las primarias*

$*$ *llamamos los objetos : sol, Júpiter, y asteroide (también se llaman primaria, segundaria y satelite)*




*El movimiento de las primarias sigue un solución del problema de 2 – cuerpos, que ya hemos resolvido.*

*Entonces tenemos sus posiciones*
*$q_S(t)$, $q_J(t)$*
*por funciones de tiempo.*

*El movimiento del asteroide, $q \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, esta governado por la siguiente EDO (tiempo dependiente!) :*

$$\ddot{q} = m_S \frac{q_S(t) - q}{|q_S(t) - q|^3} + m_J \frac{q_J(t) - q}{|q_J(t) - q|^3}$$

*Sea $m_S + m_J = 1$, y pon $\mu = m_J, 1 - \mu = m_S$.*
*Pensamos de $\mu$ como un pequeno parametro.*

*Recordamos que resolviendo problema de 2 – cuerpos consiste en :*

*$q_{cm} = \mu q_J + (1-\mu) q_S$ tiene $\ddot{q}_{cm} = 0$, podemos fijar $q_{cm}$*

*$Q = q_J - q_S$ satisface la ecuación de Kepler :*

$$\ddot{Q} = -\frac{Q}{|Q|^3}$$

$*$ *consideramos el caso circular, es decir cuando las primarias siguen una órbita circular :*
$$Q(t) = e^{it}$$

*Estas ecuaciones de movimiento para el asteroide podemos escribir en forma Lagrangian o Hamiltoniana :*

$$L = \frac{|v|^2}{2} + \frac{1-\mu}{|q - q_S(t)|} + \frac{\mu}{|q - q_J(t)|} \qquad (v = \dot{q})$$

$$H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1-\mu}{|q - q_S(t)|} - \frac{\mu}{|q - q_J(t)|}$$

*Hay dos escoges naturales para un origen :*

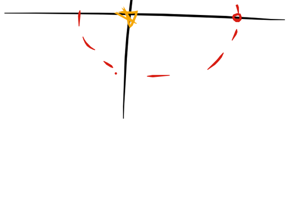
1. *el sol (coordenadas heliocentrico)*

2. *el centro de masa de las primarias (coordenadas barycentricos)*

*En las coordenadas heliocentricos,*

$$q_S(t) = 0, \ q_J(t) = e^{it} \quad y$$

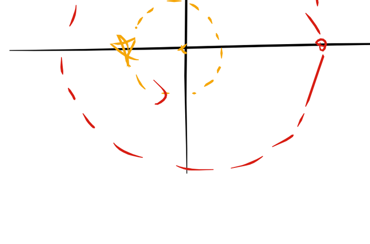
$$H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1-\mu}{|q|} - \frac{\mu}{|q - e^{it}|}$$




*En las coordenadas barycentricos,*

$$q_S(t) = -\mu e^{it}, \ q_J(t) = (1-\mu)e^{it} \quad y$$

$$H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1-\mu}{|q + \mu e^{it}|} - \frac{\mu}{|q - (1-\mu)e^{it}|}$$



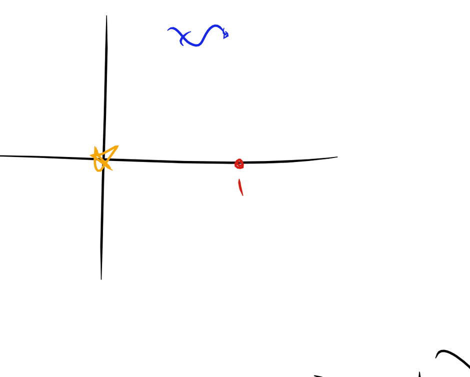
*Finalmente, para quitar el dependencia por tiempo, pasamos a una marca rodeando. En el cual las primarias quedan en posiciones fijadas :*

$$e^{it} Q = q$$

$$e^{it}(V + iQ) = v \qquad (v = \dot{q}, V = \mathring{Q})$$

$$L = \frac{|V + iQ|^2}{2} + \frac{1-\mu}{|Q|} + \frac{\mu}{|Q - 1|} \qquad (heliocentrico)$$

$$H = \frac{|P|^2}{2} - P \cdot iQ - \frac{1-\mu}{|Q|} - \frac{\mu}{|Q - 1|} \qquad (heliocentrico)$$



$$\ddot{Q} = \underbrace{-2i\dot{Q}}_{\text{COR.}} + \underbrace{Q}_{\text{cent.}} + \partial_Q U$$

[2 d.o.f. ; 1 int. (H)]