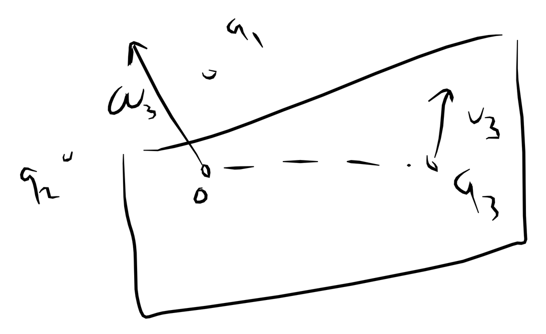
Cantidades conservadas



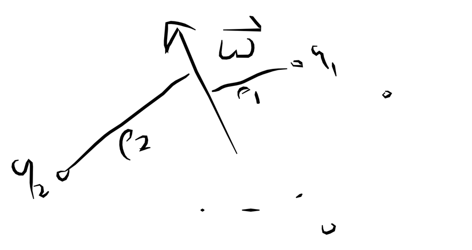
resumen :
$N1$ – *'el escenario', marcos inerciales*
$N2$ – *EDO's, determinista*
$N3$ – *hoy.*

momento lineal (total) : $p_{tot} = \sum m_j v_j$

momento angular (total) : $\vec{C}_{tot} = \sum m_j\, q_j \times v_j$

tensor de inercia : $\mathbb{I}\,\vec{\omega} = \vec{C}_{tot}$

momento inercial : $\mathbb{I}\vec{\omega}\cdot\vec{\omega} = \sum m_j \rho_j^2$

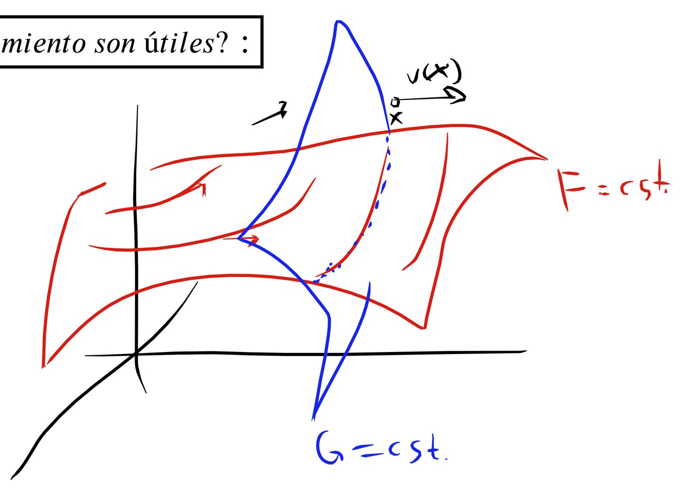


---

porque las integrales de movimiento son útiles? :

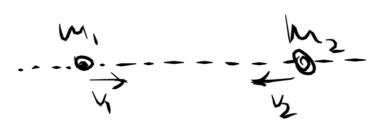
considera un campo vectorial
$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
y la EDO :
$\dot{x} = v(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *es (primer) integral* $\Rightarrow$
soluciones quedan en conjuntos niveles de F.



Conservación de momentos (sistemas cerrados)

ejemplo (choques lineales) :

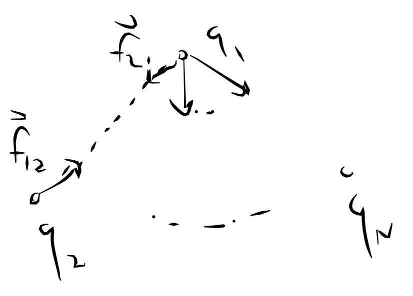


$m_1\ddot{x}_1 = f_{21}\,, \quad m_2\ddot{x}_2 = f_{12}$

$x_1 = v_1 t + \frac{t^2}{2m_1} f_{21}\,, \quad x_2 = v_2 t + \frac{t^2}{2m_2} f_{12}\,, \quad t \in (0, \Delta t)$

$u_1 = v_1 + \frac{\Delta t}{m_1} f_{21}\,, \quad u_2 = v_2 + \frac{\Delta t}{m_2} f_{12}$

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$
$\Leftrightarrow$
$f_{21} = -f_{12}$



3'era ley de Newton :
si un objeto, A, ejerce una fuerza, $\vec{f}$, *sobre un objeto, B*
entonces B ejerce una fuerza sobre A que es igual y opuesta, es decir $-\vec{f}$.

Para un sistema de partículas, $q_1,\ldots,q_N$, *produciendo fuerzas unas sobre otras :*
(pongamos $\vec{f}_{ij} :=$ *fuerza sobre* q_j *debido a* q_i*)*
$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ *y* $\vec{f}_{ij} \sim q_i - q_j$.

en un sistema cerrado (solo fuerzas debido a interacciones mutuas),
momento lineal total y momento angular total son conservados.

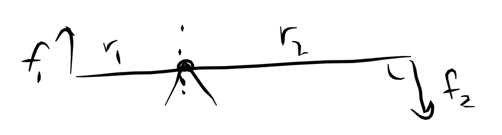
$$m_1\ddot{q}_1 = f_{21} + \ldots + f_{N1}$$
$$\ldots$$
$$+ \quad m_N\ddot{q}_N = f_{1N} + \ldots + f_{N-1,N}$$

$$m_1\ddot{q}_1 + \ldots + m_N\ddot{q}_N = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_{tot} = 0 \Rightarrow p_{tot} = cst.$$

del mismo modo, $\vec{C}_{tot} = cst.$ *(para practicar)*

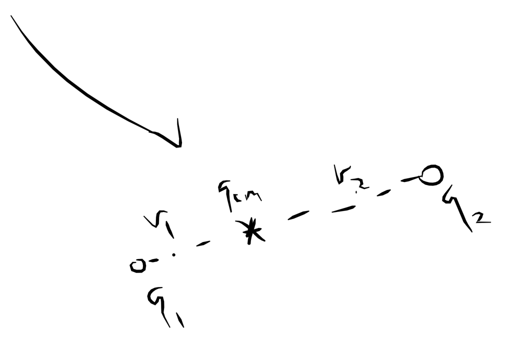
Energía

ejemplo (la palanca) :

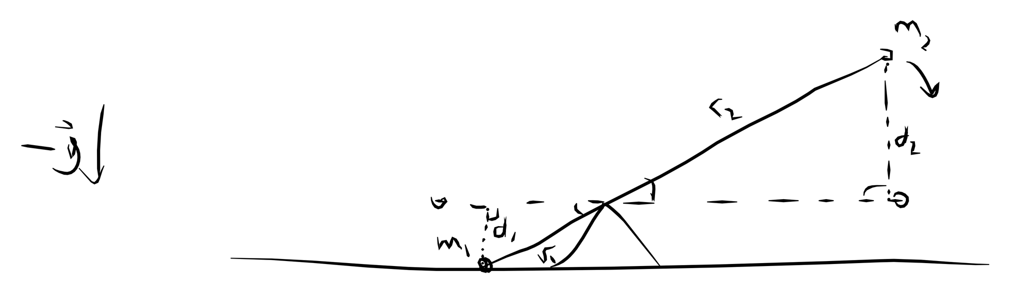


$r_1 f_1 = \tau_1 = \tau_2 = r_2 f_2$

$\underline{m_1 r_1 = m_2 r_2}$



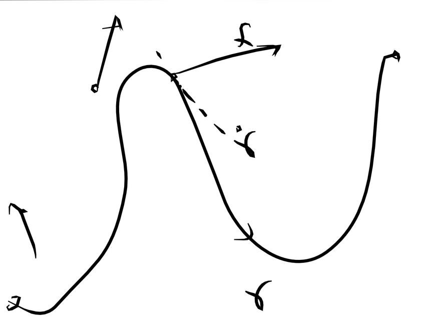
comentario : centro de masa de dos ojetos, q_1, q_2 *con masas* m_1, m_2 *es* $q_{cm} = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}$



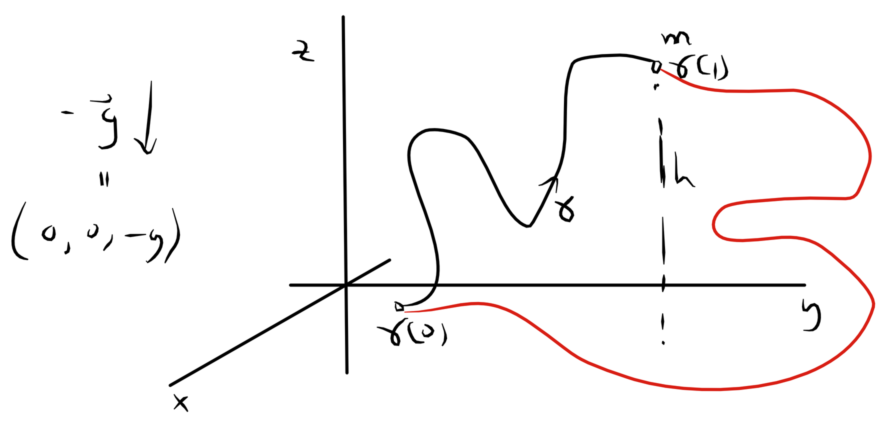
$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{f_2}{f_1}$
$f_1 d_1 = f_2 d_2$

Dado un campo de fuerzas, $\vec{f}$, *y un sendero* γ, *el trabajo hecho por las fuerzas al mover un objeto a lo largo de* γ *es :*

$$W := \int_\gamma \vec{f}\cdot d\gamma$$



ejemplo (gravedad uniforme) :



$$\int_0^1 -m\vec{g}\cdot\dot{\gamma}\,dt = \int_0^1 -mg\,\dot{\gamma}_z\,dt = -mgh$$

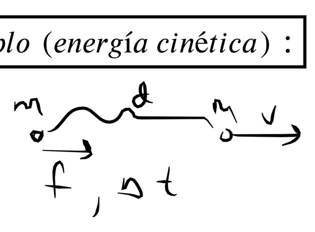
$U(x, y, z) = -mgz$

$V = mgz$

cuando el trabajo no depende del camino, sino solo de sus puntos finales, llamamos a $\vec{f}$ *un campo conservativo.*
Es equivalente a la existencia de una función U *para que :*
$f = \nabla U = -\nabla V.$
V *es llamada el potencial,* U *la funcion de fuerza.*

La energía de un ojeto es su 'trabajo almacenado'.
Energía es una cantidad conservada (para fuerzas conservativas).

ejemplo (energía cinética) :



$\frac{t^2}{2m} f$ pos ; $\frac{t}{m} f$ vel.

$\frac{\Delta t^2}{2m} f = d \qquad \frac{\Delta t}{m} f = v$

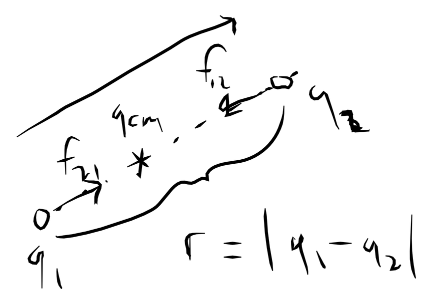
$$fd = \frac{\Delta t^2}{2m} f^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Deja que γ *sea una trayectoria :* $m\ddot{\gamma} = \vec{f} = \nabla U.$ *Entonces :*

$$U(\gamma(t_2)) - U(\gamma(t_1)) = \int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} \vec{f}\cdot d\gamma = \int_{t_1}^{t_2} m\,\ddot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}\frac{|\dot{\gamma}|^2}{2}dt = m\frac{|\dot{\gamma}(t_2)|^2}{2} - m\frac{|\dot{\gamma}(t_1)|^2}{2}$$

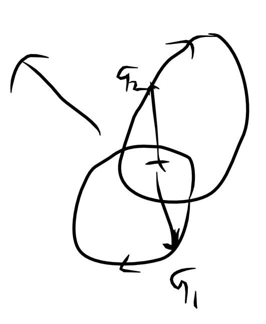
$$E := m\frac{|\dot{q}|^2}{2} - U(q) = m\frac{|\dot{q}|^2}{2} + V(q) \text{ es un integral.}$$

$*$ *fuerzas centrales (2 cuerpos)*
$*$ *el potencial* $\frac{1}{r}$
$*$ *cuerpos rígidos (principio d'Alembert)*



$f_{12} = f(r)\,(q_1 - q_2) = -f_{21}$
$f(r) > 0$, *attraction*
$f(r) < 0$, *repulsion*

$m_1\ddot{q}_1 = f_{21}$
$m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2 = p = cst.$
$m_1 q_1 + m_2 q_2 = tp + a$
$q_{cm} = tb + c$
wlog : $q_{cm} = 0$
$m_1 q_1 + m_2 q_2 = 0$



$q = q_2 - q_1$
$\ddot{q} = \frac{1}{m_2} f(r)(q_1 - q_2) - \frac{1}{m_1} f(r)(q_2 - q_1)$
$\underline{\ddot{q} = -kf(r)\,q}$

$q_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} q\,, \quad q_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} q \quad$ *when* $q_{cm} = 0$