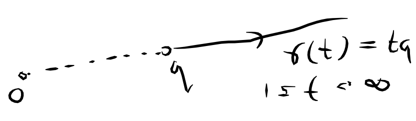
Más Kepler

El problema de Kepler :

$\ddot{q} = -\dfrac{q}{|q|^3}, \quad q \in \mathbb{C}\setminus 0$

$E = \dfrac{|\dot{q}|^2}{2} - \dfrac{1}{|q|}$
$C = \dot{q} \cdot iq$



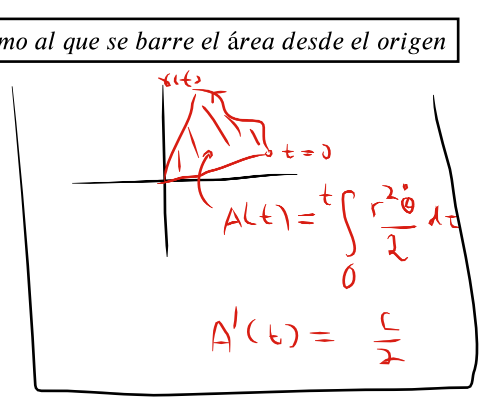
en coordenadas polares : $q = r\,e^{i\theta}$

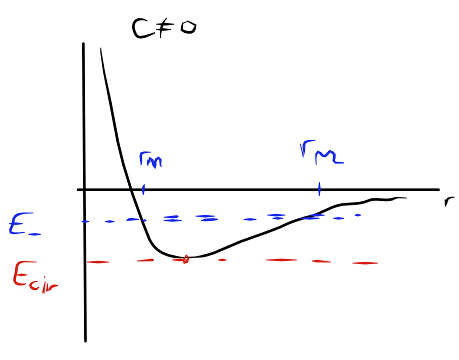
$$E = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{1}{r}$$
$$C = r^2\dot{\theta}$$

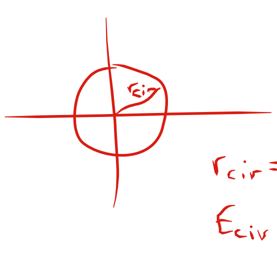
$E = \dfrac{\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\dfrac{C^2}{2r^2} - \dfrac{1}{r}}$

$E \geq V_{eff}(r;C)$

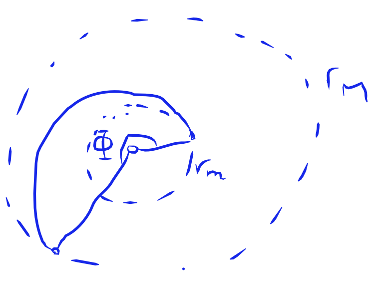
C es el ritmo al que se barre el área desde el origen

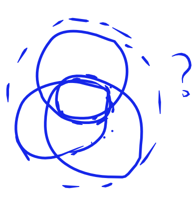


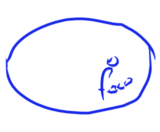




$r_{cir} = C^2$
$E_{cir} = -\dfrac{1}{2C^2}$







$\Phi_{kep} = \pi$

$\Phi_{HOOKE} = \dfrac{\pi}{2}$

computación del angulo de precession (Φ) :

$$\dot{r}^2 = 2\left(E + \frac{1}{r}\right) - \frac{C^2}{r^2}$$
$C = r^2\dot{\theta}$ (podemos parametrizar por θ)
$$\frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2} = \sqrt{2\left(E + \frac{1}{r}\right) - \frac{C^2}{r^2}}$$

$$\frac{C\,dr}{r\sqrt{2(Er^2 + r) - C^2}} = d\theta$$
$$\Phi = \int_{r_m}^{r_M} \frac{C\,dr}{r\sqrt{2(Er^2 + r) - C^2}}$$
pon $\rho = \dfrac{1}{r}$:
$$\Phi = \int_{\rho_M}^{\rho_m} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho_m - \rho)(\rho - \rho_M)}} = \pi$$

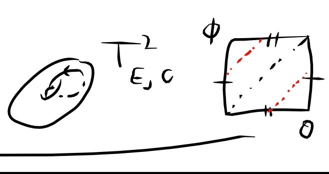
r_m, r_M roots of
$2(Er^2 + r) - C^2 = 0$
$r_m + r_M = -\dfrac{1}{E}$
$r_m r_M = -\dfrac{C^2}{2E}$

En general, esperamos que $\Phi(E,C)$.

Teorema de Bertrand (ver Arnold pg. 37) :
Las unicas fuerzas centrales para que todas las órbitas acotadas se trazan curvas cerradas son Hooke y Kepler.

Mas toros

Para Hooke ($|C| < E$)

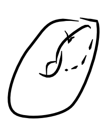


θ, ϕ $x^2 + u^2 = c_1^2$

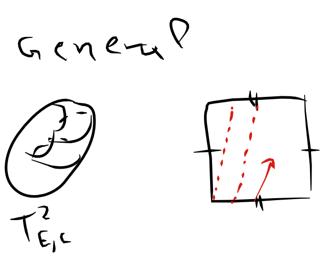
$C = cst \Rightarrow \theta = \phi + \delta$

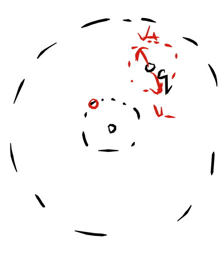
En general para E,C que dan órbitas acotados en un annilo $\left(0 \neq C, E_{circ} < E < 0 \text{ para Kepler}\right)$

Kep

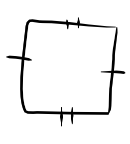


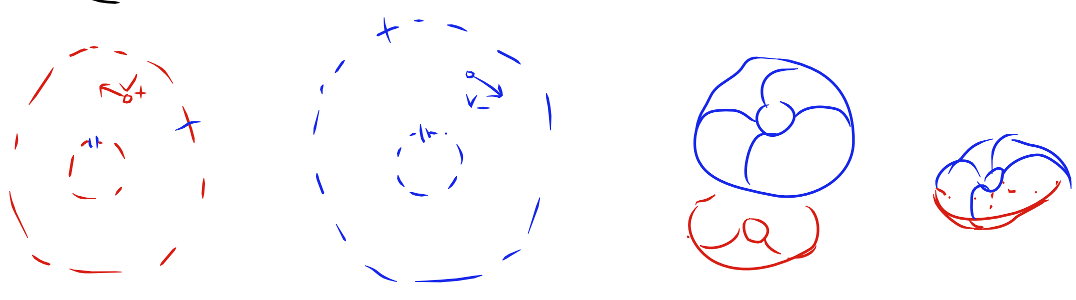
General





$T^2_{E,C} \subset \mathbb{C}^2$



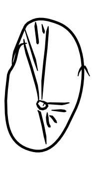


Leyes de Kepler $\Leftrightarrow$ $F \sim \dfrac{1}{r^2}$.

De las observaciones de Brahe, Kepler deduce las siguentes leyes para los movimientos de las planetas :

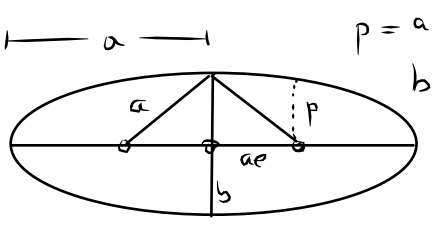
K1 : la órbita de una planeta se traza una elipse alrededor el sol con foco por el sol
K2 : el area de sector aumenta a ritmo constante.
K3 : el periodo de una órbita cuadrado es proporcional al eje mayor de elipse al cubo.

∗ en K2 el constante puede depender de la órbita, en K3 el constante de proporcion es 'universal' ∗



$T^2 \sim a^3$

recuerdos sobre cónicas :

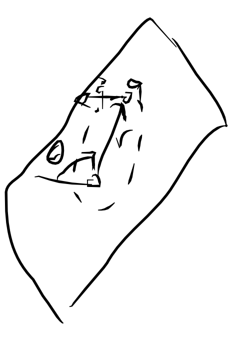


$p = a(1 - e^2)$
$b = a\sqrt{1 - e^2}$

ecuaciones por cónicas con foco en el origien
$$r = \alpha x + \beta y + \gamma$$
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - g)}$$

Assumimos que las órbitas de $\ddot{q} = -F(q)$ satisficen $K1 - 3$ $\left(\text{con } q \in \mathbb{R}^3\right)$.

por K1, las órbitas son contenidos en planos, considera un tal órbita.



En coordenadas polares (r,θ) en este plano :

$$q \times \dot{q} = r^2\dot{\theta}\,\vec{N}$$
$$\Rightarrow q \times \dot{q} = cst. \ (K2)$$
$$\Rightarrow 0 = q \times \ddot{q} = q \times F(q)$$
$$\Rightarrow F(q) = f(q)\,q, \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$q \times \dot{q} = C(t)\,\vec{N}$

Por K1 otra vez (pero mas fuerte), la órbita es de la forma :
$\rho = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{e}{p}\cos(\theta - g)$ en algún coordenadas polares en este plano.

recordar en coordenadas polares tenemos : $\ddot{r} - \dfrac{C^2}{r^3} = rf(q)$

También calculamos : $\rho'' = \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \dfrac{1}{p} - \rho$

$$\Rightarrow -C^2\rho^2\left(\frac{1}{p} - \rho\right) - C^2\rho^3 = r\,f(q)$$
$$\Rightarrow -\frac{C^2}{p}\rho^3 = f(q)$$
$$\Rightarrow F(q) = -\frac{C^2}{p\,r^3}\,q$$

$C\,dt = r^2 d\theta$
$\rho' = -\dfrac{1}{r^2}r' = -\dfrac{1}{C}\dot{r}$
$\rho'' = -\dfrac{r^2}{C^2}\ddot{r}$

Usando K3, podemos mostrar que $-\dfrac{C^2}{p}$ es constante.

$\dfrac{C}{2}T = \pi ab$ $\qquad p = a(1 - e^2) = \dfrac{b^2}{a}$

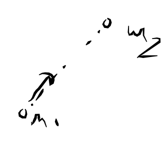
$\dfrac{C^2}{p} = \dfrac{4\pi^2 a^2 \cancel{b^2}}{T^2} \cdot \dfrac{a}{\cancel{b^2}} = \dfrac{4\pi^2 a^3}{T^2}$

$\boxed{\Rightarrow F = -K\dfrac{q}{|q|^3}}$

∗ estos pasos son reversibles ∗

Aplicación en sistema solar

$$|f_{ij}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
Para dos cuerpos con $q_{cm} = 0$:
$$q_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}q, \quad q_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}q$$
donde $q = q_2 - q_1$ satisficie :
$$\ddot{q} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|q|^3}q$$



$4\pi^2 a^3 = G(m_1 + m_2)T^2$
$m_1 \gg m_2$
$4\pi^2 a^3 \approx G m_1 T^2$

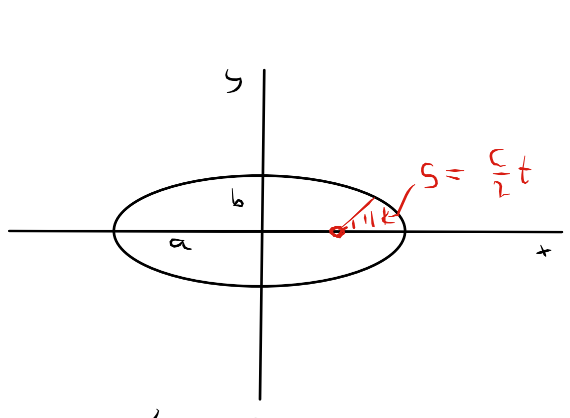
1672 : Cassini mide $\approx a_{Mars}$ (método de paralaje)
1761 : el tránsito de venus determina a_{Venus} con mucho precisión
1798 : Cavendish determina G (pesa el sol, tierra,...)

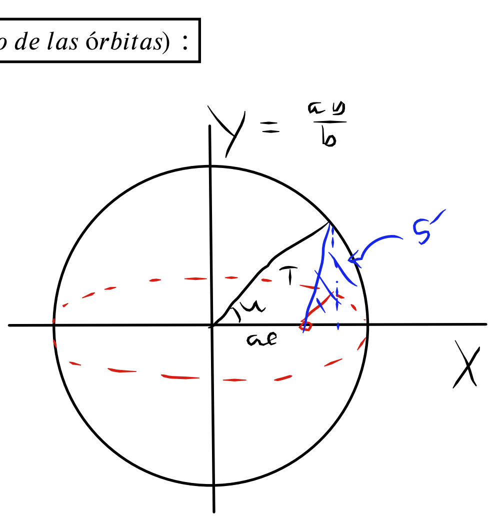
K1 por un truco listo de Lagrange :

recordar : $f'' + a(t)\,f' + b(t)\,f = c(t)$
cada solución es de la forma :
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) + f_p(t), \quad a,b \in \mathbb{R}$
con f_1, f_2 soluciones de la ecuacion homogenea $(c = 0)$.

$$\ddot{q} = -\frac{q}{|q|^3}, \quad q = x + iy$$
$$\ddot{x} = -\frac{x}{r(t)^3}, \ddot{y} = -\frac{y}{r(t)^3}$$
$$\ddot{r} = \frac{C^2 - r}{r(t)^3}$$
$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{C^2 - f}{r(t)^3}$$
$$\frac{d^2 f}{dt^2} = b(t)\,f + c(t)$$
cualquier solución es un combinación lineal de dos soluciones homogeneas y un particular.
Entonces :
$$r(t) = \alpha\,x(t) + \beta\,y(t) + C^2.$$

Ecuación de Kepler (tiempo a lo largo de las órbitas) :



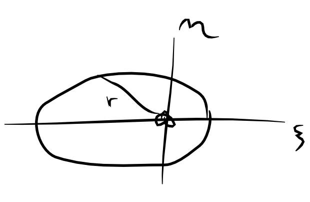


$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad X^2 + Y^2 = a^2$

$S' + T = \dfrac{a^2 u}{2}$

$\dfrac{a}{b}S + \dfrac{a^2 e \sin u}{2} = \dfrac{a^2 u}{2}$

$\dfrac{C}{ab}t = u - e\sin u$



desde $r_m + r_M = -\dfrac{1}{E}, r_m r_M = -\dfrac{C^2}{2E}$ obtenemos :
$$E = -\frac{1}{2a}, \ C^2 = a\left(1 - e^2\right).$$

La ecuación de Kepler :
$$a^{-\frac{3}{2}}t = u - e\sin u$$
relaciona tiempo y posición.

La posición desde el 'sol' es :
$\xi = a(\cos u - e), \eta = b\sin u, \ r = a(1 - e\cos u)$