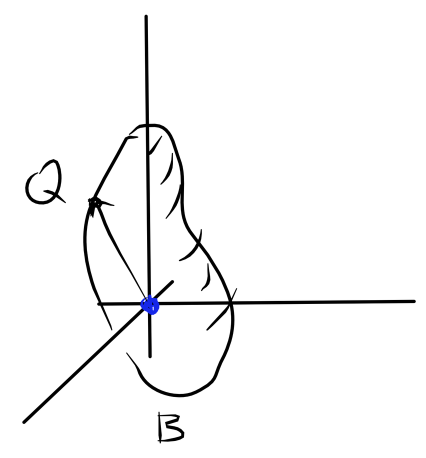
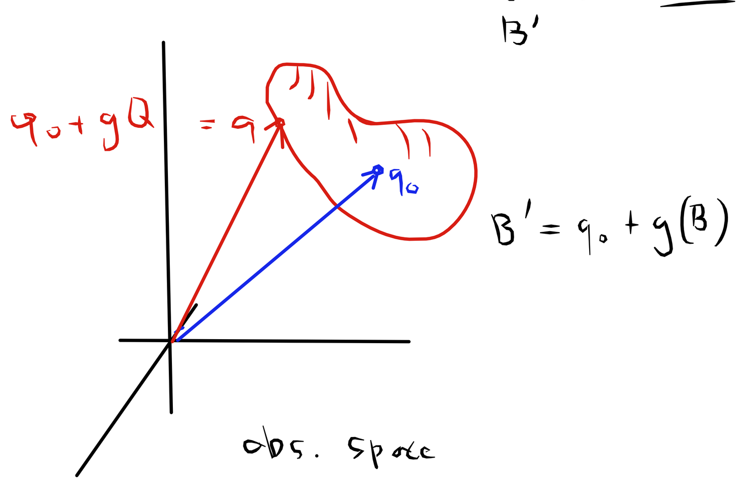
Cuerpo rígido libre

$f = 0$ $\qquad \int_{B'} \ddot{q} \cdot \delta q = 0$





El movimiento del cuerpo está dado por una curva :
$\left(q_o(t), g(t)\right) \in \mathbb{R}^3 \times SO_3.$

$\dot{g} Q = \dot{g} g^{-1} g Q = \underbrace{\dot{g} g^{-1}}_{\omega \in so_3} (q - q_0)$

$$\dot{q} = \dot{q}_o + \dot{g}\, Q = \dot{q}_o + \vec{\omega} \times \left(q - q_o\right)$$

$$\ddot{q} = \ddot{q}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \left(q - q_o\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \left(q - q_o\right)\right)$$

$$\delta q = \delta q_o + \delta \vec{\omega} \times \left(q - q_o\right)$$
para $\delta q_o, \delta\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$.

d'Alembert $\Rightarrow$

$$0 = \int_{q \in B'} \ddot{q} \cdot \delta q \; d\mu, \quad \text{donde } d\mu := \rho d^3 q.$$

$\delta \vec{\omega} = 0$ $\qquad \forall \delta q_0 \in \mathbb{R}^3$

$0 = \int_{q \in B'} \ddot{q} \cdot \delta q_0 \, d\mu = \left(\int \ddot{q} \, d\mu\right) \cdot \delta q_0$

$\Rightarrow \int \ddot{q} \, d\mu = 0$

$\int q - q_0 \, d\mu = 0$

$\int q \, d\mu = \int q_0 \, d\mu = M q_0$

Considera el caso cuando el cuerpo esta centrado por su centro de masa :

$$q_o = q_{cm}(B') = \frac{1}{M} \int_{B'} q \, d\mu, \quad \text{donde } M := \int_{B'} d\mu$$

$q_0 = \vec{a} t + \vec{b}$

$\int \ddot{q}_0 \, d\mu = 0$

$M \ddot{q}_0 = 0$

Tomamos un marca inercial con $q_{cm} = 0$ el origen.

$a \cdot (b \times c)$

$$\ddot{q} = \dot{\vec{\omega}} \times q + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times q)$$
$$\delta q = \delta \vec{\omega} \times q$$

$\forall \delta \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$

$$0 = \int_{q \in B'} ((\dot{\vec{\omega}} \times q) \cdot (\delta\vec{\omega} \times q) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times q)) \cdot (\delta\vec{\omega} \times q)) \, d\mu$$
$$= \delta\vec{\omega} \cdot \int q \times (\dot{\vec{\omega}} \times q) + q \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times q)) \; d\mu$$
$$\Rightarrow 0 = \int q \times (\dot{\vec{\omega}} \times q) + q \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times q)) \; d\mu$$

$\mathbb{I} \vec{\omega} = \int q \times (\vec{\omega} \times q) \, d\mu$?

$\int q \times (\omega^2 q) \, d\mu$

$0 = \mathbb{I} \dot{\vec{\omega}} + \mathbb{I} \omega^2$

Tensor de inercía

$$\mathbb{I}\, \vec{\omega} := \int_{q \in B'} q \times (\vec{\omega} \times q) \; d\mu$$

$\vec{\omega} \longleftrightarrow \omega q = \vec{\omega} \times q$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathbb{I}} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ so_3 & \xrightarrow{\mathbb{I}} & so_3 \end{array}$$
$\omega \longmapsto s\,\omega^T - \omega s$

$q(\omega q \cdot v) - \omega q (q \cdot v)$

$q q^T \omega^T v - \omega q q^T v$

$s := \int_{q \in B'} q q^T d\mu$

para $\omega \in so_3$ que corresponde a $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$,
$\mathbb{I}\omega \in so_3$ es la mapa :

$$\vec{v} \mapsto \int_{q \in B'} (q \times (\omega q)) \times \vec{v} \; d\mu$$
con la identidad :
$(a \times b) \times c = (b \cdot c)\, a - (a \cdot c)\, b$
obtenemos :
$$\vec{v} \mapsto \left(\int_q q q^T \omega^T - \omega\, q q^T \, d\mu \right) \vec{v}$$

En este forma, podemos extender $\mathbb{I} : so_3 \to so_3$
a una mapa $\mathbb{I}' : gl_3 \to so_3$
$A \mapsto sA^T - As$

$\mathbb{I}' A = \int q \times (Aq) \, d\mu \in \mathbb{R}^3 \hookrightarrow so_3$

Regresando a cuerpo rígido libre

$\omega^T = -\omega$

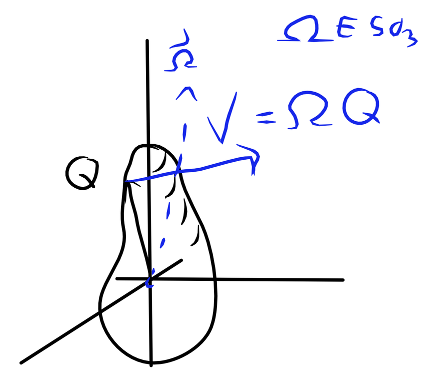
$(\omega^2)^T = \omega^2$

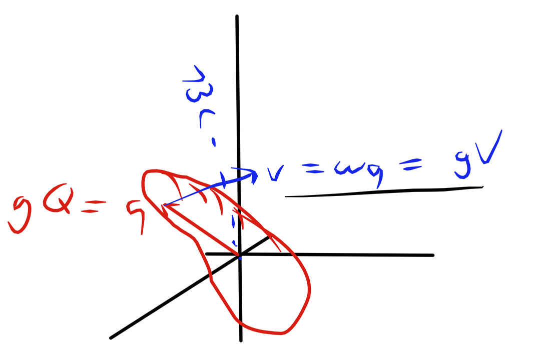
$\dot{\omega} \in so_3$

Tenemos :
$$0 = \mathbb{I}\,\dot{\omega} + \mathbb{I}' \omega^2$$
donde $\omega(t) = \left(\frac{d}{dt} g(t)\right) g(t)^{-1} \in so_3 \quad \left(\omega = \dot{g}\, g^{-1}\right)$

$s\dot{\omega} + \dot{\omega} s = s\omega^2 - \omega^2 s$

$\omega(t) g = \dot{g}$





$\omega = g \Omega g^{-1}$

$\dot{\omega} = g \dot{\Omega} g^{-1}$

$\dot{\omega} g + \cancel{\omega \dot{g}} = g \dot{\Omega} + \cancel{\dot{g} \Omega}$

$v = \dot{q} = \omega q = \dot{g} Q = \underbrace{\dot{g} g^{-1}}_{\in so_3} g\, Q = g \underbrace{\Omega Q}_{V} = g \Omega g^{-1} g Q = g \Omega g^{-1} q$

desde $q = gQ$ y con :

$\omega = \dot{g}\, g^{-1}, \quad \Omega = g^{-1} \dot{g} \in so_3$

tenemos $\omega g = g\Omega$ y calculamos :

$[\dot{\omega} g = g\dot{\Omega}]$

ademas,
$$s = \int_{q \in B'} q q^T \, d\mu = g \underbrace{\int_{Q \in B} Q Q^T \, d\mu}_{S} \; g^{-1}$$

$q = gQ$

$s = g S g^{-1}$

Todo junto, la edo :
$s\dot{\omega} + \dot{\omega} s = s\omega^2 - \omega^2 s$
convierte a :

$S\dot{\Omega} + \dot{\Omega} S = S\Omega^2 - \Omega^2 S$

$g(S\dot{\Omega} + \dot{\Omega} S) g^{-1} = g(S\Omega^2 - \Omega^2 S) g^{-1}$

EULER (1758)

$\Omega \in so_3 \approx \mathbb{R}^3$

Integrales

momento angular en espacio :
$c = \mathbb{I}\omega$

momento angular en el cuerpo :
$C = \mathbb{I}_B \Omega = g^{-1} c\, g$

$c = s\omega^T - \omega s$ $\qquad \dot{c} = 0$

$C = S\Omega^T - \Omega S = g^{-1} c\, g \Rightarrow$ $\qquad \left.\begin{array}{l} \dot{C} = [C, \Omega] \\ \dot{C} = C\Omega - \Omega C \end{array}\right\}$

not cst. but $\|C\|^2 = \|c\|^2 = cst.$

$\Updownarrow$
$\cancel{A}$
$\Updownarrow$
$\dot{c} = 0$

Energía cinetica :
$$\int \|\omega q\|^2 d\mu = \mathbb{I}\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = tr\left(\mathbb{I}\omega\, \omega^T\right) = tr(\mathbb{I}_B \Omega \Omega^T) = \mathbb{I}_B \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} = cst.$$
es otra constante.

$\mathbb{I}_B \vec{\Omega} \cdot \mathbb{I}_B \vec{\Omega} = cst.$

$\mathbb{I}_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathbb{I}_B = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$

$\sum I_j^2 \Omega_j^2 = cst.$ $\qquad \sum I_j \Omega_j^2 = cst.$