Tarea 4

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. (a) Considera una sistema non-autonoma con Lagrangiana: $L(q, v, t)$, y acción: $\gamma \mapsto \int_\gamma L$.

   Verificar que las extremales con tiempo y puntos finales fijados (es decir sobre la clase de curvas: $\Gamma = \{\gamma : [0, T] \to Q \ t.q. \ \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q_1\}$ con T, q_0, q_1 fijado) satisficen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

   Ademas, muestra que para la 'energía' $E := \partial_v L \cdot v - L$ y una extremal γ, tenemos:

   $$\frac{d}{dt} E(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \partial_t L(\gamma, \dot{\gamma}, t).$$

   (b) Considera coordenadas girando en el plano: $e^{i\omega t} Q = q \in \mathbb{C}$. Suponer que el movimiento de q es dado por una Lagrangiana de la forma: $L = \frac{|v|^2}{2} + U(|q|)$. Expresar la Lagrangiana y la energía en estas coordenadas girando: $Q, V = \dot{Q}$.

2. Considera una mesa de bilares, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, convexo con $\partial\Omega$ suave. Deja que $\gamma(s) : [0, \ell] \to \partial\Omega$ sea un parametrización por longitud de $\partial\Omega$ (entonces $\gamma(0) = \gamma(\ell)$).

   Pon $S(s_0, s_1) = dist(\gamma(s_0), \gamma(s_1))$. La funcion $S : [0, \ell] \times [0, \ell] \to \mathbb{R}$ es suave cuando $s_0 \neq s_1$.

   (a) En los puntos donde S esta diferenciable, muestra que $\partial_{s_0} S = -\cos\varphi_0$ y $\partial_{s_1} S = \cos\varphi_1$ (ver figuras para definiciones de los angulos φ_j).

   (b) Para $n \in \mathbb{N}_{>0}$, considera la función $A : [0, \ell]^{n+1} \to \mathbb{R}$ definido por:

   $$A(s_0, ..., s_n) := S(s_0, s_1) + S(s_1, s_2) + ... + S(s_{n-1}, s_n) + S(s_n, s_0).$$

   Muestra que una configuración, $(s_0, ..., s_n)$, lo que es un maximo de A, determina los puntos de impacto con $\partial\Omega$ de una órbita periodica para bilares en Ω.

3. Deja que $u, v, c : [0, T] \to \mathbb{R}$ con u, v continuo y c diferenciable y positiva. Suponer que tales funciones satisficen:

   $$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)\ ds, \quad \text{para } t \in [0, T].$$

   (a) Pon $R(t) := \int_0^t u(s)v(s)\ ds$. Muestra que $\frac{dR}{dt} - uR \leq uc$.

   (b) Usa un factor integrador, μ, para poner parte (a) en la forma:

   $$\frac{d}{dt}(\mu R) \leq \mu uc.$$

   (c) En integrando los dos lados de (b) de 0 a t y areglando, deducir la lemma de Gronwall:

   $$v(t) \leq c(0) \exp\left(\int_0^t u(s)\ ds\right) + \int_0^t c'(s) \exp\left(\int_s^t u(\tau)\ d\tau\right) ds.$$

   Sugerencia: usa $\mu' = -\mu u$ y integración por partes.

4. Deja que A, B sea dos $n \times n$ matrizes simetricas con A estrictamente positiva. Muestra que las dos pueden ser simultaneamente diagonalizada: existe un matrix invertible, P, con $P^T A P = Id, P^T B P = D$, donde $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ es diagonal con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ las racines de $det(B - \lambda A) = 0$.

5. Describir el compartamiento de las órbitas del pendulo doble (ver figuras) cerca a los puntos de equilibrio usando el método de pequenas oscilaciones en el caso cuando $m_j = \ell_j = 1$.

6. Considera el problema de Hooke en el plano: $\ddot{q} = -q$ con $q \in \mathbb{C}$. Aplicar la teorema de Noether para derivar las integrales de este sistema desde sus simetrias.

7. Considera la Lagrangiana $L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ para $y > 0$. Deja que $SL_2(\mathbb{R})$ sea el grupo de matrizes 2×2 que tienen determinante 1.

   (a) Verificar que $A \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$, donde $z = x + iy$ y $A \in SL_2(\mathbb{R})$, dan simetrias de L.

   (b) Describir las órbitas associados a L (es decir las trayectorias de las ecuaciones de Euler-Lagrange).

8. Considera la funcional $A(u) = \int_0^1 e^{-u'(x)^2}\ dx$ donde $u \in \Gamma = \{C^1[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$. Notar que $A(u) > 0$ para cada $u \in \Gamma$.

   Construir una secuencia $u_n \in \Gamma$ para que $A(u_n) \to 0$. Concluir que no existe un minimizador de A sobre Γ.

9. El problema de resistencia minimal de Newton asigna la resistencia:

$$R(u) := \int_D \frac{dxdy}{1 + |\nabla u|^2}$$

   a una función $u : D \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ es el disco unitario. Notar que $R(u) > 0$ para cada tal u en lo que la integración tiene sentido.

   (a) Para $u_n(x,y) := ndist((x,y), \partial D)$, con $n \in \mathbb{N}$, mostrar que $R(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

   (b) Para $u_n(x,y) := \sin^2(\pi n|(x,y)|)$, con $n \in \mathbb{N}$, mostrar que $R(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

   en estas problemas, se puede usar que una función de distancia: $u(x,y) = dist((x,y), \Sigma)$ con $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ una curva suave o un punto, satisfice el ecuación de Eikonal: $|\nabla u| = 1$.

10. Considera el problema de Kepler en el plano: $\ddot{q} = -q/|q|^3, q \in \mathbb{C}\backslash 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, deja que

$$\Gamma_n := \{\gamma : [0, nT] \to \mathbb{C}\backslash 0\ t.q.\ \gamma(0) = \gamma(nT), ind_\gamma(0) = n\}$$

   sea el clase de circuitos alrededor el origen n-veces en tiempo fiajada. Mostrar que el acción atravesando una órbita eliptica n-veces no minimiza el acción. Sugerencia: considerar una secuencia de curvas en Γ_n acercando la órbita de colision.

11. Considere una cuerda elástica, con puntos finales fijados (ver figuras). Para pequenas oscilaciones de la cuerda, suponemos que la configuración de la cuerda en el momento t nos podemos representar por una grafica, $(x, u(x,t))$ donde $u(\cdot, t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ tiene $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

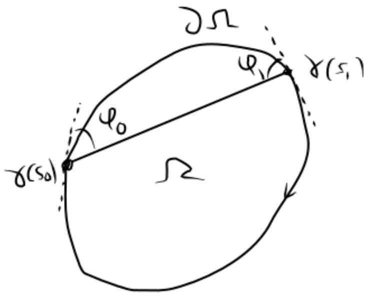
   (a) Suponer que la energía potencial de la cuerda en una configuración dado por u es algún función de la longitud de la cuerda: $V(u) = f(\ell(u))$, donde $\ell(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u_x^2}\ dx$. Ademas, cuando el cuerda no está desplazado, no tiene energia potencial, es decir $f(1) = 0$. Usa expansion de Taylor para deduir que:

$$V(u) = k \int_0^1 \frac{u_x^2}{2} + O_3(u_x)\ dx, \quad k \text{ algún constante.}$$

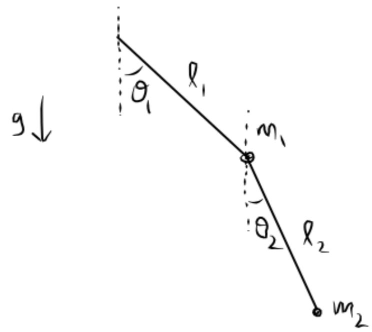
   (b) Para la Lagrangiana, $L(u, u_t) := \int_0^1 \frac{u_t^2}{2} - k\frac{u_x^2}{2}\ dx$, deducir que las ecuaciones de Euler-Lagrange son la ecuacion de ondas:

$$u_{tt} = ku_{xx}.$$

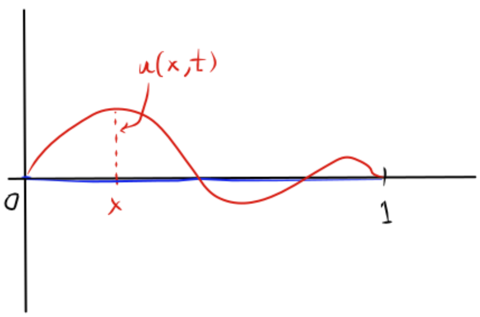
   (c) Encontrar unas soluciones de la ecuacion de ondas usando el método de seperacion de variables.



2) *Bilares en un región convexo del plano.*



5) *El péndulo doble.*



11) *Pequenos desplazamientos de una cuerda elástica.*
Sin desplazarlo, la cuerda queda en equilibrio
como el segmento del eje $- x$ *entre* 0 *y* 1.
Consideramos las configuraciones de la cuerda que son
representados por gráficas :
$(x, u(x,t))$, *con* $x \in [0,1]$.