Tarea 3

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. En clase derivamos que la rotación infinitesmal para un cuerpo rígido en la marca referencial, $\Omega = g^{-1}\dot{g}$, satisface:
$$S\dot{\Omega} + \dot{\Omega}S = S\Omega^2 - \Omega^2 S,$$
donde S es una matríz simétrica constante.

   (a) Deja que $C = \mathbb{I}_B\Omega = -S\Omega - \Omega S$ sea el momento angular en la marca referencial y $c = gCg^{-1}$ el momento angular en el marco de observación. Mostrar que $\dot{c} = 0$ y $\dot{C} = [C, \Omega] = C\Omega - \Omega C$.

   (b) Deja que $K = \mathbb{I}_B\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}tr(\Omega \mathbb{I}_B \Omega)$ sea la energía cinética del cuerpo. Mostrar que $\dot{K} = 0$.

   (c) En el caso cuando los autovalores de $\mathbb{I}_B$ son distintos, digamos son $I_1 < I_2 < I_3$, haz un boceto de las intersecciones de $K = 1$ con varios niveles de $|\vec{C}|^2$ en el espacio $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$.

2. Da un ejemplo de un problema variacional para el cual:

   (a) existen dos puntos que tienen multiples extremales conectando los puntos

   (b) existen dos puntos que no tienen extremales conectando los puntos.

3. Considera un problema variacional en el plano de la forma: $\gamma \mapsto \int L(\gamma, \dot{\gamma})\, dt$. Qué condiciones satisfice una extremal cuando la clase de curvas es:

   (a) $\Gamma = \{\gamma \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2)\ t.q.\ \gamma(0) = \gamma(1)\}$.

   (b) $\Gamma = \{\gamma \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2)\ t.q.\ \gamma(0) \in \ell_0, \gamma(1) \in \ell_1\}$ donde ℓ_0, ℓ_1 son dos lineas fijadas en el plano.

4. Describe como se comportan las órbitas de un péndulo esférico.

5. (a) El principio de Fermat, afirma que el sendero que sigue un rayo de luz es lo que minimiza el tiempo de viaje. Suponer que la velocidad de la luz en el semiplano superior ($y > 0$) del plano xy es v_1, y la velocidad de la luz en el semiplano inferior ($y < 0$) es v_2. Mostrar la ley de Snell (ver figuras),
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$
para un rayo de luz cruzando la frontera entre estos dos medios.

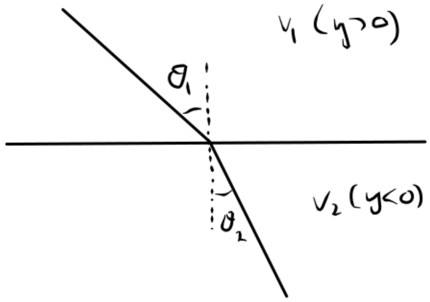
   (b) Para una curva gráfica de la forma $(x, y(x))$, deja que $\theta(x)$ sea el ángulo entre la dirección vertical (eje-y) y la tangente a la curva (ver figuras). Considera la condición $\frac{v}{\sin\theta} = cst.$ donde $v := \sqrt{y}$. Muestra que la curva cicloide satisfice esta condición.

6. Considera una 'cadena cargada' (ver figuras). Supon que el peso de la cadena es insignificante con respeto al peso de la carga. Mostrar que la forma de la cadena cargada que cuelga libre es una parábola.

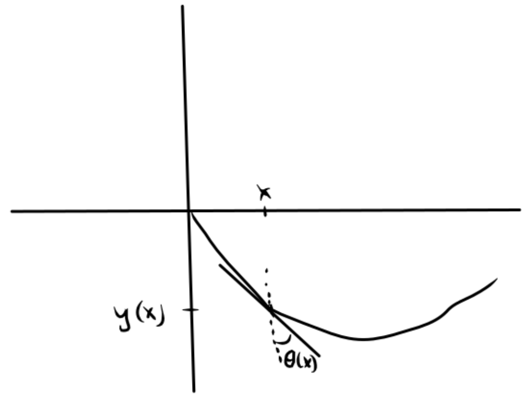
7. Considera superficies de revolución de la forma $(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$ donde $f : [z_o, z_1] \to [y_0, y_1]$ es un difeomorfismo para $z_j, y_j \in \mathbb{R}$ fijado. Encuentra las extremales de la funcional $f \mapsto A(f)$, donde $A(f)$ es el área de la superficie de revolución.

8. Haz un boceto de unas geodésicas en un toro de revolución.

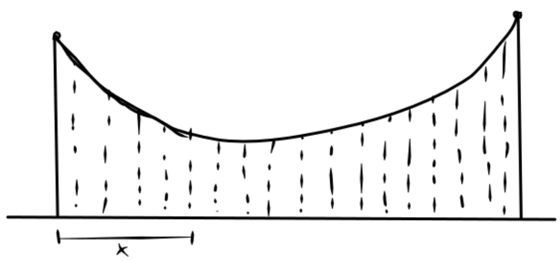
9. En el problema de Kepler, calcular la acción sobre un periodo de una órbita elíptica con energía $E < 0$. (sugerencia: considera la parametrización de las órbitas por la 'eccentric anomaly' u que aparece en la ecuación de Kepler que derivamos en 'lecture 6')



5*a*) *Ley de Snell*



5*b*) *curva Brachistrone estilo de Bernoulli*



6) *Una cadena cargada. El peso de una porción de la cadena es proporcional a la distancia x.*