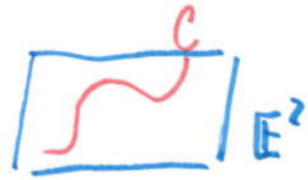
CURVAS PLANARES

Por una curva planar, entendemos como un subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2$ del plano euclideano dado (localmente) por



* una parametrización: $\mathcal{C} = \mathrm{im}(c)$, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$
* o implícitamente: $\mathcal{C} = f^{-1}(\text{cst.})$, $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$

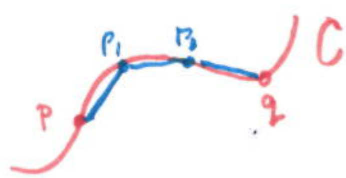
Comentarios: c, f deben ser diferenciable, y consideramos curvas regulares ($dc, df \neq 0$). En coordenadas ($\mathbb{E}^2 \approx \mathbb{R}^2$), son dados por fórmulas ($c(t) = (x^1(t), x^2(t))$, $f(x^1, x^2) = \text{cst.}$). Por teorema de funciones implícitas las dos descripciones son localmente equiv.

Pregunta básica: ¿Para dos curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, cuando existe una isometría $\varphi : \mathbb{E}^2 \circlearrowleft$ t.q. $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$?

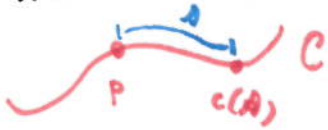
Denotamos la distancia entre $p, q \in \mathbb{E}^2$ por $|pq|$.

La longitud de un segmento de una curva entre $p, q \in \mathcal{C}$ es:

$$\ell(\mathcal{C}_{p,q}) := \sup_{p = p_1 < p_2 < \dots < p_{n+1} = q} \sum_{i=1}^{n} |p_i p_{i+1}|$$



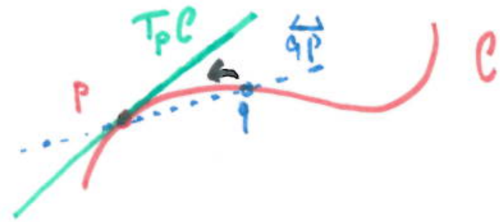
Cada curva regular admite param. por longitud del arco: para $p \in \mathcal{C}$ sea $c(s)$ el punto de $\mathcal{C}$ con dist. s a lo largo de $\mathcal{C}$



* Notación: vamos a usar 's' para parametrizaciones por long. de arco, y $c'(s) := \frac{dc}{ds}$.
Para param's generales a menudo usamos 't' para el parámetro y $\dot{c}(t) := \frac{dc}{dt}$.

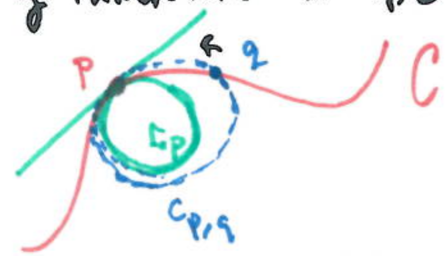
LA LINEA TANGENTE de $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$ es el límite DE LOS SECANTES:

$$T_p\mathcal{C} := \lim_{\mathcal{C} \ni q \to p} \overleftrightarrow{qp}$$



EL CÍRCULO OSCULANTE DE $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$ es el límite DE LOS CÍRCULOS PASANDO POR p, q y TANGENTE A $T_p\mathcal{C}$:

$$* \quad C_p := \lim_{\mathcal{C} \ni q \to p} C_{p,q}$$



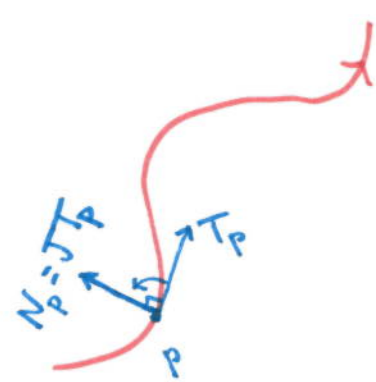
* CUANDO $q \in T_p\mathcal{C}$ CONSIDERAMOS $c_{p,q} = T_p\mathcal{C}$ como un CÍRCULO DEL RADIO INFINITO.

EL RADIO r_p del círculo OSCULANTE LLAMAMOS EL RADIO DE CURVATURA DE $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$. Su INVERSO $k_p := \frac{1}{r_p}$ llamamos la CURVATURA DE $\mathcal{C}$ por p.

* CÍRCULOS SON PRES. POR ISOMETRÍAS. EN PARTICULAR, SI $K_1(p_1) \neq K_2(p_2)$ NO EXISTE UNA ISOMETRÍA DE $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ llevando $p_1 \in \mathcal{C}_1$ a $p_2 \in \mathcal{C}_2$.

ORIENTANDO LA CURVA, OBTENEMOS UNA MARCA MOVÍL A LO LARGO de $\mathcal{C}$:

PARA CADA $p \in \mathcal{C}$, $T(p), N(p)$ SON UN BASE ORTONORMAL DE $\mathbb{E}^2$, CON $T(p) \in T_p\mathcal{C}$. POR CONVENCIÓN, TOMAMOS $N(p) = JT(p)$ UNA ROTACIÓN DE $T(p)$ por $\frac{\pi}{2}$ EN EL SENTIDO ANTI-HORARIO.



* LA MANERA EN QUE TAL MARCA 'GIRA' CONDUCE A OTRA DESCRIPCIÓN DE LA CURVATURA, Y UNAS FÓRMULAS PARA SU COMPUTACIÓN.

1) TENEMOS DOS APLICACIONES

$$T, N : C \longrightarrow S^1$$

DESDE $T\cdot T = N\cdot N = 1$, $T\cdot N = 0$ OBTENEMOS POR REGLA DE PRODUCTO:

$T\cdot dT = N\cdot dN = 0$, $N\cdot dT = -T\cdot dN$

ENTONCES

$$dT = N\,d\theta \quad , \quad dN = -T\,d\theta$$

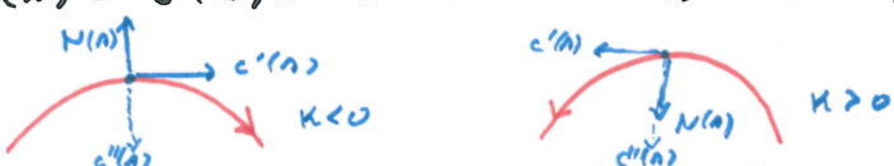
ALGÚN FUNCIÓN $\theta : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

LLAMAMOS $d\theta(T) = \theta' = \frac{d\theta}{dt} =: \kappa$ LA CURVATURA CON SIGNO.

* las diferenciales entendemos en la siguiente manera:

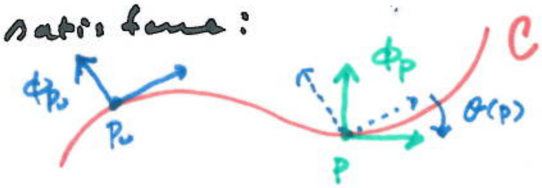
$dT_p : T_pC \to T_{T(p)}S^1$ envía $v = \dot{c}(0)$ con $c(0) = p$ a $\frac{d}{dt}\big|_0 T(c(t))$.

EN UNA PARAM. POR LONG. DEL ARCO, $c(s)$, TENEMOS $T(s) = c'(s)$. ENTONCES $\kappa(s) = c''(s)\cdot Jc'(s)$.



2) OTRA INTERPRETACIÓN RELACIONA CON EL GRUPO DE ROTACIONES. SEA $\Phi = [T\ N]$ el marco. CADA DOS MARCOS SON RELACIONADOS POR UNA ROTACIÓN, entonces fijando un marco de referencia, LA MARCA MÓVIL A LO LARGO DE C satisface:

$$\Phi(p) = R(p)\,\Phi(p_0)$$



con $R : C \to SO_2$ UNA CURVA DE ROTACIONES.

ESCRIBIENDO $R(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta(p) & -\sin\theta(p) \\ \sin\theta(p) & \cos\theta(p) \end{pmatrix}$ POR $\theta : C \to \mathbb{R}$

OBTENEMOS POR DIFFERENCIACIÓN:

$$d\Phi = dR\cdot R^{-1}\Phi = J\Phi\, d\theta \quad \Rightarrow \quad dT = N\,d\theta,\ dN = -T\,d\theta$$

COMO ANTES.

ALGUNOS RESULTOS:

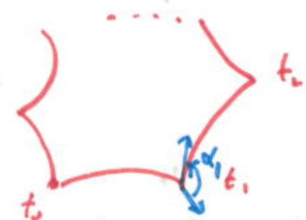
* EN UNA PARAM. $c(t)$, tenemos $K(t) = \dfrac{\ddot{c}(t) \cdot J \dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|^3}$

* $|K| = k$

* EXISTE COORDENADAS PARA QUE $c(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} K(0)\right) + O(s^3)$
  LA EXPANSIÓN A CUALQUIER ORDEN DEPENDE SOLO POR LAS DERIVADAS DE $K(s)$ EVALUADA EN $s = 0$.

* DADO $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, EXISTE UNA CURVA PARAM. POR LONGITUD CON CURVATURA SIGNADO $K(s)$. TAL CURVA ESTA ÚNICA HACIA ISOMETRÍAS.

* Para una curva cerrado: $c(t+T) = c(t)$ ($T > 0$ fijado) y quitar definido por partes (c diff. en algún subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T$) TENEMOS:



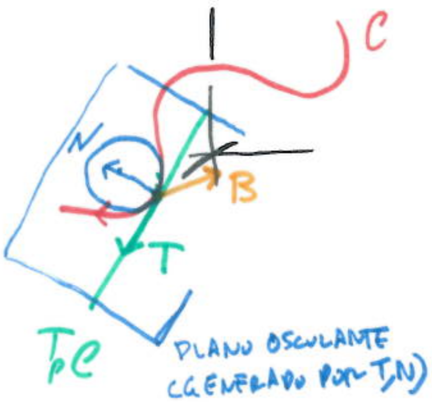
$$\int_0^l K \, ds + \sum \alpha_j = 2\pi n_c$$

con $n_c \in \mathbb{Z}$ el numero de tomeando, y α_j los ángulos exteriores por los vertices. Si la curva es sencilla ($c|_{[0,T]}$ injectiva) entonces $n_c \in \{\pm 1\}$.

CURVAS ESPACIALES

CONSIDERAMOS SUBCONJUNTOS $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ DESCRITOS (LOCALMENTE) POR PARAMETRIZACIONES (REGULAR Y DIFERENCIABLE).

LA LÍNEA TANGENTE Y CÍRCULO OSCULANTE SE DEFINEN EN LA MISMA MANERA COMO ANTES (y entonces tenemos $k : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$).



ORIENTANDO LA CURVA CONDUCE A UNA MARCA MOVIL *EN LOS PUNTOS CON $k \neq 0$*:

- $T(p)$ vector unitario a lo largo de $T_p\mathcal{C}$
- $N(p)$ " " dirigida hacia el centro del círculo osculante
- $B(p) = T(p) \times N(p)$ NORMAL UNITARIO AL PLANO OSCULANTE (EL PLANO QUE CONTIENE EL CÍRCULO OSCULANTE)

COMO ANTES, DENOTAMOS $\Phi = [T \ N \ B]$ PARA ESTE MARCA A LO LARGO DE $\mathcal{C}$ y tenemos:

$$\Phi(p) = R(p)\,\Phi(p_0)$$ PARA ALGÚN CURVA $R : \mathcal{C} \to SO_3$ de rotaciones.

DIFERENCIACIÓN CONDUCE A: $d\Phi = dR \cdot R^{-1}\,\Phi$

DONDE $dR \cdot R^{-1} : T\mathcal{C} \to so_3$ (MATRICES ANTI-SYMETRICAS).

ENTONCES CON $d\Omega := dR \cdot R^{-1}$, $d\Omega(T) =: \vec{\omega} \times (\cdot)$ ALGÚN $\vec{\omega} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$, LLAMADO EL VECTOR DE DARBOUX, PARA QUE:

$$T' = \vec{\omega} \times T \quad , \quad N' = \vec{\omega} \times N \quad , \quad B' = \vec{\omega} \times B$$

SE PUEDE VERIFICAR QUE $T' = kN$ LO QUE IMPLICA:

$$(*) \quad T' = kN \quad , \quad N' = -kT + \tau B \quad , \quad B' = -\tau N$$

CON $\vec{\omega} = \tau T + kB$. LAS ECUACIONES $(*)$ LLAMAMOS LAS ECUACIONES DE FRENET-SERRET, y la función $\tau : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ LA TORSIÓN.

\# POR EXPANSIÓN DE TAYLOR, EXISTEN COORDENADAS PARA QUE:

$$c(s) = \left(s - \frac{s^3}{6}\kappa_0^2,\ \frac{s^2}{2}\kappa_0 + \frac{s^3}{6}\kappa_0',\ \frac{s^3}{6}\kappa_0\tau_0\right) + \mathcal{O}(s^4)$$

Y LOS TÉRMINOS HASTA CUALQUIER ORDEN SE PUEDE EXPRESAR EN TÉRMINOS DE DERIVADAS DE $\kappa(s), \tau(s)$ evaluadas por $s=0$ (LO QUE SIGUE DE LAS ECUACIONES FRENET-SERRET).

\# Integrando las ecuaciones de F-S conduce A:

DADO $\kappa, \tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, EXISTE UNA CURVA PARAM. POR LONGITUD CON TALES FUNCIONES PRESCRITAS DE CURVATURA Y TORSIÓN. TAL CURVA ESTÁ ÚNICA HASTA ISOMETRÍAS.

\# Se puede derivar expresiones para κ, τ en una PARAM. general:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|}{|\dot{c}(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)] \cdot \dddot{c}(t)}{|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|^2}.$$

\# OTROS RESULTAS INTERESANTES (PARA LAS DEMOSTRACIONES, VAMOS A USAR ALGUNOS CONCEPTOS DE SUPERFICIES) son:

(FENCHEL) LA CURVATURA TOTAL DE UNA CURVA ESPACIAL QUE NO ES PLANAR ES MAYOR QUE 2π: $\int_C k(s)\,ds > 2\pi$ si C NO ES PLANAR.

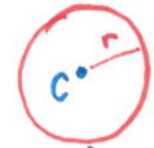
(FARY-MILNOR) LA CURVATURA TOTAL DE UNA CURVA ESPACIAL QUE NO ES ISOTÓPICA AL CÍRCULO (C es ANUDADO) ES MAYOR QUE 4π:

$\int_C k(s)\,ds > 4\pi$ si C está ANUDADA.

Ejemplos:

0) Descripciones del círculo como

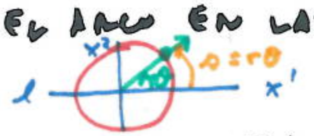
· Lugar geométrico: puntos en $\mathbb{E}^2$ con distancia fijado r a un punto fijado C.



· Implícitamente: $f: E^2 \to \mathbb{R}$, $P \mapsto |CP|^2$. Entonces $f^{-1}(r^2)$ es el círculo. Con coordenadas cartesianas centrado por C tenemos la ecuación $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$

· Parametrizaciones: Fija una línea, l, pasando por C. Sea $c(\theta)$ la intersección del círculo con el rayo $\overrightarrow{Pc(\theta)}$ haciendo un ángulo de θ con l. En coordenadas cart. centrado por C y con eje alineado con l tenemos $c(\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta)$.

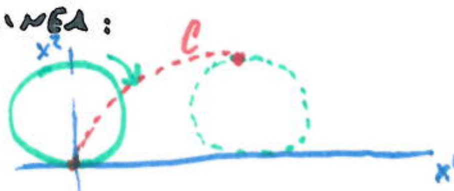
Una parametrización por longitud del arco en las mismas coords es $c(a) = r\left(\cos\frac{a}{r}, \sin\frac{a}{r}\right)$.



Fija un punto P en el círculo y sea $c(t)$ la intersección del círculo con la línea pasando por P y con pendiente t con respeto a la línea tangente del círculo por P.
En coords cart. centrado por P y con un eje alineado con la tangente por P tenemos $c(t) = r\left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

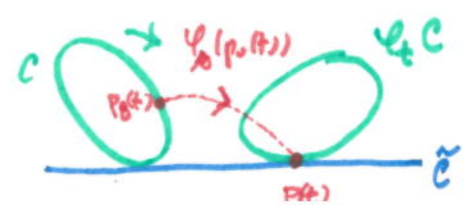
Este parametrización cubre el círculo menos el punto antipodal a P (lo que corr. a '$t = \infty$').

1) Un cicloide es la curva que traza un punto por un círculo cuando lo "rodeamos sin resbaldarse" a lo largo una línea:



Tomando la línea por un eje y un punto de contacto del cicloide con la línea por origen tenemos la param: $c(\theta) = r(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$

donde r es el radio del círculo y θ el ángulo de que ha sido rotado. "Rodear sin resbaldar" podemos precisar el concepto de en la siguiente manera, que uno resume en breve como "el punto de contacto tiene velocidad cero".



· La posición del objeto rollando está dado para cada instante 't' por aplicando una isometría φ_t a su configuración inicial

· Sea $p(t)$ el punto de contacto de $\varphi_t(C)$ con $\tilde{C}$

• Entonces $p(t) = \varphi_t(p_0(t))$ por algún $p_0(t)$ en la configuración inicial de C.

• La curva $\varphi_s(p_0(t))$ parametriza la trayectoría de $p_0(t)$ durante la rollando ($s \in \mathbb{R}$) cuando $s=t$ estamos por el punto de contacto $p(t)$.

Decimos C rodea sin resbaldarse a lo largo de $\tilde{C}$ si

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \varphi_s(p_0(t)) = 0 .$$

(lo que significa no estas aplicando demasiado gas o frenos.)

2) Una envolvente de una familia de curvas se puede pensar como una curva lo que es en cada punto tangente a algún miembro de la familía.

Dado la familía de curvas implicitamente $f(x^1,x^2;u)=0$ tal envolvente satisfice $f(x^1(t),x^2(t),u(t))=0$ y $\dot{x}^1 f_{x^1}(x^1(t),x^2(t),u(t)) + \dot{x}^2 f_{x^2}(x^1(t),x^2(t),u(t)) = 0$ lo que implica $f_u(x^1(t),x^2(t),u(t))\dot{u} = 0$. Si $\dot{u} \neq 0$ entonces encontramos la envolvente por eliminación de u por:

(*) $f(x^1,x^2,u)=0$, $f_u(x^1,x^2,u)=0$ (que puede ser vacío eg

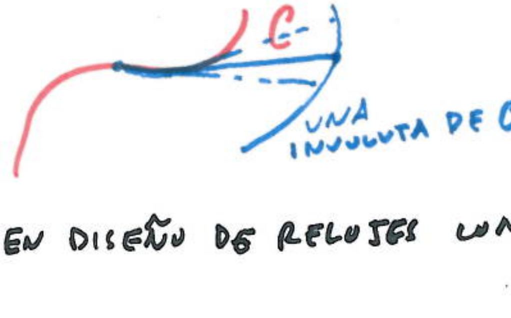
También se puede interpretar como los puntos "donde la familía es lo más denso", o donde curvas de la familia intersectan a primer orden. En forma parametrica, se puede expresar (*) por la condición

(*) $\det\left[\partial_t c(t,u)\ \ \partial_u c(t,u)\right] = 0$ (ó dc no es invertible.)

Comentario: en la óptica, la envolvente también llamamos la caustica, debido a que modela donde la luz sea lo más intenso. La envolvente de las lineas normales a una curva llamamos la evoluta de tal curva.

La involuta de una curva uno obtiene por trazando el fin de una cuerda, pegado al curva por un punto:

(con longitud fijado)



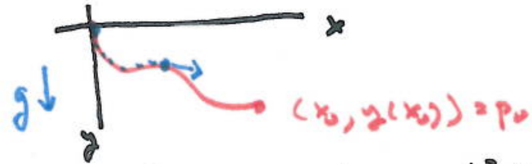
Resulta que la evoluta de cualquier involuta de C es C.

Tales propiedades aplicado al cicloide son útil en diseño de relojes con pendulos (Huygens).

3) CÁLCULO VARIACIONAL (BRACHISTOCHRONE). UNA CUENTA DESLIZÁNDOSE A LO LARGO DE UN ALAMBRE — SUJETO A FUERZA GRAV. CONSTANTE — TIENE TIEMPO DE DESCENSO:

$$T = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}\,dx$$

CUANDO EL ALAMBRE ES DADO POR UNA GRÁFICA $(x, y(x))$ $x \in [0, x_0]$.



FIJANDO p_0, UNA CURVA GRÁFICA QUE EXTREMIZA (ES COMO UN PUNTO CRÍTICO) ESTE TIEMPO SATISFACE LA EDO

$$(y')^2 = -\frac{k^2+y^2}{y}$$

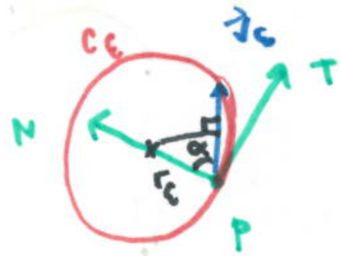
, QUE IMPLICA $y = -\frac{k^2}{2}(1-\cos\theta)$; $x = \frac{k^2}{2}(\theta - \sin\theta)$

LO QUE ES UNA CICLOIDE. SE PUEDE MOSTRAR QUE ADEMÁS MINIMIZA Y NO SOLO EXTREMIZA EL TIEMPO DE DESCENSO.

4) CALCULAMOS LA CURVATURA DE UNA PARÁBOLA $(y=x^2)$ USANDO LA DEFINICIÓN GEOMÉTRICA. SEA $p=(x,x^2)$ UN PUNTO POR LA PARÁBOLA Y $p_\varepsilon = (x+\varepsilon, (x+\varepsilon)^2)$ "CERCA".

PONEMOS $\vec{v}_\varepsilon := p_\varepsilon - p = (\varepsilon, 2\varepsilon x + \varepsilon^2)$.

ENTONCES EL RADIO, r_ε, del círculo pasando por p, p_ε, y tangente al parab. satisface:



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_\varepsilon|}{2r_\varepsilon}$$

, DONDE α es el ÁNGULO ENTRE $\vec{v}_\varepsilon$ Y N. ENTONCES:

$$k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\cos\alpha}{|\vec{v}_\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\,|\vec{v}_\varepsilon \cdot N|}{|\vec{v}_\varepsilon|^2} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$