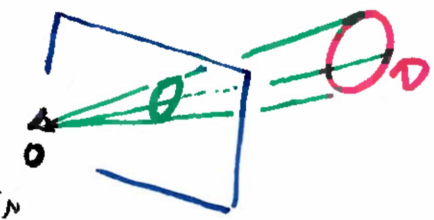
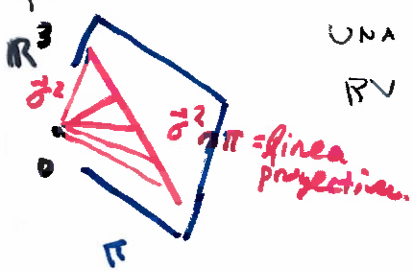
Ejemplos

1) LA MOTIVACIÓN PARA geometría proyectiva surge de dibujando objetos en perspectiva.

CONSIDERAMOS LAS POSIBLES LINEAS DE VISIÓN A NUESTRO OJO COMO LAS LINEAS EN $\mathbb{R}^3$ PASANDO POR EL ORIGEN. PARA DIBUJAR UN OBJETO, $D \subset \mathbb{R}^3$, SOBRE UN "CANVAS" (PLANO AFINA $\pi \subset \mathbb{R}^3$) TRATAMOS LAS INTERSECCIONES $\{\overleftrightarrow{od} \cap \pi : d \in D\}$.



En general, sea V^{n+1} un espacio vectorial de dimensión $n+1$ y $\mathbb{P}V$ el conjunto de subespacios de dimensión 1. Tenemos cartas afinas por tomando un plano afina $0 \notin \pi^n \subset V$ y enviando $p \in \pi$ a la linea $\overleftrightarrow{op} \in \mathbb{P}V$.

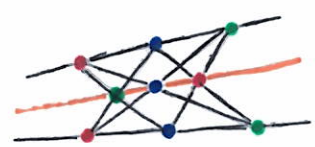


UNA proyectiva k-plano en $\mathbb{P}V$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}V$ contenido en un subespacio $\vec\sigma^{k+1} < V^{n+1}$ de dimensión $k+1$. Por ejemplo en $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$, una 1-linea es representado por un plano de $\mathbb{R}^3$ PASANDO POR EL ORIGEN.

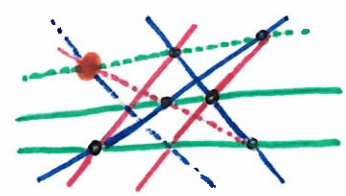
LA geometría de hiperplanos ($\vec\sigma^n < V^{n+1}$) TIENE UN EMPAREJAMIENTO CON LA geometría de puntos $p \in \mathbb{P}V$, que conduce a LA DUALIDAD PROYECTIVA.

Algebraicamente, a $\vec\sigma^n < V^{n+1}$ asociamos el subespacio 1-dimensional $\{\alpha \in V^* \text{ t.q. } \ker\alpha = \vec\sigma^n\}$ de la espacio vectorial dual a V.

Entonces el espacio de hiperplanos en $\mathbb{P}V$ esta $\mathbb{P}V^*$ y la relación de INCIDENCIA: $p = [\vec v] = \operatorname{span}\vec v \in \mathbb{P}V$ contenido en hiperplano $[\alpha] = \operatorname{span}\alpha \in \mathbb{P}V^*$ sea $(\alpha, \vec v) = 0$ DONDE $V^* \times V \to \mathbb{R}$, $(\alpha, \vec v) \mapsto (\alpha, \vec v) := \alpha(\vec v)$ es el emparejamiento NATURAL DE V con su dual V^*.



* EN EL PLANO PROYECTIVA ($\dim V = 3$), LA DUALIDAD RESULTA QUE CADA TEOREMA SOBRE INCIDENCIA DE LINEAS ($\mathbb{P}V^*$) Y PUNTOS ($\mathbb{P}V$) QUEDA VALIDO EN INTERCAMBIANDO PUNTOS POR LINEAS Y LINEAS POR PUNTOS.



* PROPIEDADES DE INCIDENCIA DE k-planos EN $\mathbb{P}V$ SON EQUIVALENTES A PROPIEDADES EN ALGEBRA LINEAL SOBRE INTERSECCIONES O SUBESPACIOS generados DE SUBESPACIOS DE V. TALES PROPIEDADES SON INVARIANTES BAJO TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS: $[A] : \mathbb{P}V \circlearrowleft$ $[\vec v] \mapsto [A\vec v]$ DONDE $A \in \mathcal{L}(V,V) = GL(V)$ es un TRANSFORMACIÓN LINEAL y INVERTIBLE de V. DOS TRANSF. A y $\lambda \cdot A$ ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$) INDUCEN LAS MISMAS TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS.

Escribimos $\mathbb{P}GL(V) = GL(V) / A \sim \lambda A$ PARA ESTE grupo. Depende de $\dim(V)^2 - 1$ PARAMETROS. USANDO ESTE grupo, UNO PUEDE MOSTRAR TEOREMAS POR CONSIDERANDO CASOS "SENCILLAS" — CUANDO APLICAS UNA SIMETRÍA PARA PONER LOS OBJETOS EN UNA CONFIGURACIÓN "mas facil a analizar".

* Tomando un base $\vec v_0,\dots,\vec v_n$ de V con corr. base dual $v^0,\dots,v^n$ de V^* podemos expresar todo en coordenadas:

$$X=(X^0,\dots,X^n)\longleftrightarrow X^j\vec v_j\in V\ ;\quad A=(A_0,\dots,A_n)\longleftrightarrow A_j v^j\in V^*$$

obtengan cartas afinas usando parallelos a planos coordenetarios, p. ej. $\{X^0=1\}$ tenemos:

$$\mathbb{P}V\ni[X]=[X^0:\dots:X^n]=\mathrm{span}(X)\ (X^0\neq0)\longleftrightarrow x=(x^1,\dots,x^n)=\left(\frac{X^1}{X^0},\dots,\frac{X^n}{X^0}\right).$$

y similarmente:

$$\mathbb{P}V^*\ni[A]=[A_0:\dots:A_n]\ (A_0\neq0)\longleftrightarrow a=(a_1,\dots,a_n)=\left(\frac{A_1}{A_0},\dots,\frac{A_n}{A_0}\right).$$

La relación de incidencia tiene la expresión:

$$[X]\in[A]\iff A_jX^j=0\quad(\text{suma } j=0,\dots,n)$$

ó en las cartas afinas arriba $x\in[A]\iff A_0+x^1A_1+\dots+x^nA_n=0$, ó bien cuando $A_0\neq0$ también: $x\in a\iff 1+x^ja_j=0$ (suma $j=1,\dots,n$).

En la carta afina arriba ($X^0\neq0$), la transformación proyectiva inducida por $L\in GL(V)$ con rep. matricial $\begin{pmatrix} b_0 & \vec b_{1,n}\\ \vec d_{n,1} & B_{n,n}\end{pmatrix}$ en la base $\{\vec v_j\}$ esta dado por

$$x\longmapsto\frac{Bx+\vec d}{b_0+\vec b\cdot x}$$

en la carta afina con $(X^0\neq0)$. (La acción dual es por $[A]\longmapsto[(L^*)^{-1}A]$)

Por ejemplo, la transformación $x\mapsto Bx+\vec d$ transforma los hiperplanos (con $A_0\neq0$) por $a\mapsto\dfrac{(B^T)^{-1}a}{1-\vec d\cdot(B^T)^{-1}a}$ y $x\mapsto\dfrac{Bx}{1+b\cdot x}$ por $a\mapsto(B^T)^{-1}a-(B^T)^{-1}b^T$

Subconjuntos de $\mathbb{P}V$ definido por ecuaciones cuadráticas (2'a orden) llamamos cónicas: $\beta:V\to V^*$ simétrica ($\beta=\beta^*$ con $V^{**}=V$) esta asociado a la cónica

$$\mathcal{C}_\beta=\{[v]\in\mathbb{P}V:(\beta v,v)=0\}.$$

Tal cónica es no-degenerado cuando β es invertible. El conjunto de cónicas su mismo forman un espacio proyectiva:

$\mathbb{P}S^2(V)$ donde $S^2(V)$ es el espacio vectorial de aplicaciones simétricas (la correspondencia es $[\beta]\longleftrightarrow\mathcal{C}_\beta$ arriba).

La dimensión de este espacio de cónicas es $\dfrac{\dim V(\dim V+1)}{2}-1$.

El plano tangente a la cónica por $[v]\in\mathcal{C}_\beta$ es el hiperplano $[\beta v]\in\mathbb{P}V^*$. Cuando β es no-degenerado, la collección de planos tangentes forman una cónica en $\mathbb{P}V^*$, la cónica dual: $\mathcal{C}^*_\beta=\{[\alpha]\in\mathbb{P}V^*:(\alpha,\beta^{-1}\alpha)=0\}$.

* sea $[v(t)]$ una curva en $\mathcal{C}_\beta$. Entonces con $[w]=[\dot v]\in T_v\mathcal{C}$ un vect. tang. tenemos

$T_v\mathcal{C}_\beta=\{[w]\in\mathbb{P}V:(\beta v,w)=0\}$ por diff. de $(\beta v(t),v(t))=0$ (regla producto)

LA RELACIÓN DE INCIDENCIA ENTRE PUNTOS Y CÓNICAS SE PUEDE EXPRESAR CON EL ENCAJAMIENTO VERONESE:

$$\mathbb{P}V \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}S^2(V)^* \qquad \text{ENTONCES } [v] \in \mathcal{C}_\beta \iff (\nu(v), \beta) = 0.$$
$$[v] \longmapsto [\alpha_v] \qquad \text{donde } \alpha_v(\beta) = (\beta v, v)$$

OTRA VARIANTE ES
$$\mathbb{P}V^* \xrightarrow{\nu^*} \mathbb{P}S^2V \qquad \text{DONDE } (\beta_\alpha(v), w) = (\alpha, w)(\alpha, v)$$
$$[\alpha] \longmapsto [\beta_\alpha] \qquad \text{i.e. } \beta_\alpha(v) = (\alpha, v)\cdot\alpha$$

RELEVANTE DEBIDO A QUE SU IMAGEN, $\nu^*(\mathbb{P}V^*)$, CONSISTE DE LAS CÓNICAS degeneradas.

SON CASOS PARTICULAR DE LA ENCAJAMIENTO DE SEGRE:

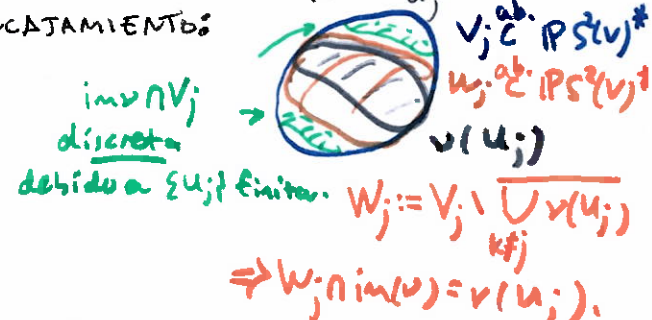
$$\mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}W^* \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(V^* \otimes W^*)$$
$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha \otimes \beta]$$

DEBIDO A QUE $V^* \otimes W^* = \mathcal{B}(V, W; \mathbb{R}) = L(V, W^*) = L(W, V^*)$ es NATURALMENTE IDENTIFICADO CON APLICACIONES BILINEALES $V \times W \to \mathbb{R}$, o APLICACIONES LINEALES $V \to W^*$ o $W \to V^*$.

* PARA VERIFICAR SON ENCAJAMIENTOS, UNO PUEDE VERIFICAR QUE SON 1-1 y IMMERSIONES. p.ej. EN COORDENADAS AFINAS DE UN BASE ($X^0 \neq 0$ ~~carta~~ carta afina) tenemos

$\nu(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_1, x_2)$ [PARA $\dim V = 3$, y USANDO EL BASE ASOCIADO DE $S^2(V)$]

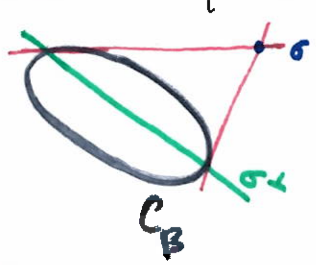
que tiene DIFERENCIAL $\begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ SIEMPRE DE RANGO 2. SIMILARMENTE EN OTRAS CARTAS. AHORA, POR FORMA NORMAL LOCAL DE IMERSIONES, ν es UN ENCAJAMIENTO LOCAL, y por COMPACTIDAD DE $\mathbb{P}V$, SE PUEDE PASAR A UN COBERTURA $\{U_j\}$ finita de $\mathbb{P}V$ t.q. $\nu|_{U_j}$ es un ENCAJAMIENTO QUE IMPLICA ν es globalmente UN ENCAJAMIENTO:



* UN CÓNICA NO DEGENERADO DETERMINA UNA RELACIÓN DE POLARIDAD ENTRE SUBESPACIOS de $\mathbb{P}V$:

$$\vec{\sigma}^{k+1} < V^{n+1} \longleftrightarrow \vec{\sigma}^\perp < V^{n+1} \quad (\dim \vec{\sigma}^\perp = n-k)$$

donde $\vec{\sigma}^\perp = \{[v] : (\beta(u), v) = 0 \ \forall u \in \vec{\sigma}\}$



TEOREMAS DE Algebra lineal sobre COMPLEMENTOS ORTOGONALES TRADUCEN A RESULTAS SOBRE CONSTRUCCIONES CON LINES/ESPACIOS TANGENTES A CÓNICAS.

LOS ESPACIOS DE PROYECTIVA k-planos TAMBIÉN FORMA UNA VARIEDAD:

$$\mathbb{G}(k,n) = Gr(k+1, n+1) = \{\vec{\sigma}^{k+1} < V^{n+1}\} \text{ `='} \{[v] : v \in \vec{\sigma}^{k+1} < V^{n+1}\}$$

LLAMADO UNA GRASSMANIANA. p.ej. $\mathbb{G}(0,n) = \mathbb{P}V$, $\mathbb{G}(n-1,n) = \mathbb{P}V^*$.

SU STRUCTURA DIFFERENCIABLE SE PUEDE ENTENDER EN LA SIGUIENTE MANERA:

- para $\vec{\sigma} \in Gr(k+1, n+1)$ la inclusión $\vec{\sigma} \xhookrightarrow{\iota} V$ INDUCE $V^* \xrightarrow{\iota^*} \vec{\sigma}^*$
- dado UN BASE $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n$ de V, SEA $\pi_{j_0,\dots,j_k} : V \to \mathbb{R}^{k+1}$

LA PROYECCIÓN SOBRE EL PLANO $\mathrm{span}\langle \vec{v}_{j_0},\dots,\vec{v}_{j_k}\rangle$ $(0\le j_0<\dots<j_k\le n)$.

- ENTONCES $\iota^*\circ\pi^*_{j_0,\dots,j_k}:\mathbb{R}^{k+1}\to\vec{\sigma}^*$, y en ESCOJIENDO UN BASE DE $\vec{\sigma}^*\cong\mathbb{R}^{k+1}$ TENEMOS $p_{j_0,\dots,j_k}(\vec{\sigma})\in\mathbb{R}$ PARA LA DETERMINANTE DE ESTE APLICACIÓN $\mathbb{R}^{k+1}\circlearrowleft$.
- UN OTRO ESCOGE DE BASE PARA $\vec{\sigma}^*$ rescala todos $p_{j_0,\dots,j_k}(\vec{\sigma})$'s POR LA MISMA FACTOR. ES DECIR TENEMOS UN APLICACIÓN $Gr(k+1,n+1)\longrightarrow$ ALGÚN ESP. PROYECTIV
- RESULTA ESTE APLICACIÓN ES UN ENCAJAMIENTO DE $\mathbb{G}(k,n)$ en $\mathbb{PR}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$, LLAMADO EL ENCAJAMIENTO DE PLÜCKER. P. ej. el imagen de $\mathbb{G}(1,3)\longrightarrow\mathbb{PR}^6$ esta (USANDO RELACIONES DE DETERMINANTES) DEFINIDO POR $[p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{12}:p_{13}:p_{23}]$ t.q.

$$p_{01}p_{23}-p_{02}p_{13}+p_{03}p_{12}=0.$$

2) UNA VARIEDAD, G, que también es un grupo ~~de~~ se llama un grupo de Lie CUANDO SUS OPERACIONES son diferenciables:

$$G\times G\xrightarrow{\mu}G,\qquad G\xrightarrow{\iota}G$$
$$(g,h)\longmapsto g\cdot h\qquad g\longmapsto g^{-1}.$$

* OBSERVA QUE LAS TRASLACIONES (POR IZQUIERDA Ó DERECHA) SON difeomorfismos de G:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "L_g"'] & \{g\}\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}\qquad (R_g=\iota\circ L_{g^{-1}}\circ\iota)$$

QUE CONDUCEN A HOMOMORFISMOS:

$$G\xrightarrow{l}\mathrm{Diff}(G)\qquad G\xrightarrow{r}\mathrm{Diff}(G)$$
$$g\longmapsto L_g\qquad g\longmapsto R_{g^{-1}}$$

(con $l(g_1\cdot g_2)=l(g_1)\circ l(g_2)$, $r(g_1\cdot g_2)=r(g_1)\circ r(g_2)$).

p.ej:
1) ESPACIOS VECTORIALES de dimensión n, CON OPERACIÓN ADICIÓN VECTORIAL.
2) TOROS DE DIMENSIÓN n: $\underbrace{S^1\times\dots\times S^1}_{n\text{-veces}}$. Sea $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ UN BASE DE $(V,+)$ y pon $\Lambda:=\{k^j\vec{v}_j : k^j\in\mathbb{Z}\}$ (UN 'TRELLIS' en V). ENTONCES $\mathbb{T}^n:=V/\Lambda$ es el espacio cuociente por $\vec{v}\sim\vec{w}\iff\vec{v}-\vec{w}\in\Lambda$, sera un grupo de Lie con $[\vec{v}]+[\vec{w}]:=[\vec{v}+\vec{w}]$.

3) GRUPOS MATRICIALES: $GL(V)=\{A:V\to V$ INVERTIBLE$\}$ CON COMPOSICIÓN. SE CONTIENE IMPORTANTE SUBGRUPOS (TAMBIÉN SUBVARIEDADES) COMO: $SL(V)=\{A\in GL(V)$ t.q. $\det(A)=1\}$, $O(V)=\{A\in GL(V)$ t.q. $\langle Av,Au\rangle=\langle u,v\rangle\}$ CUANDO V tiene producto interior $\langle\,,\rangle$.

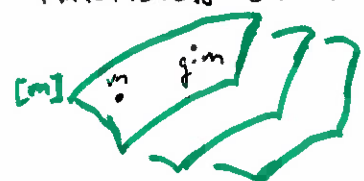
UN ACCIÓN (diferenciable) de G sobre un VARIEDAD M, es un homomorfismo $G \xrightarrow{\phi} \mathrm{Diff}(M)$; $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$.

* ESCRIBIMOS $G \circlearrowright M$ para significar G actua sobre M, y $g \cdot m := \phi(g)(m)$ [ENTONCES $(g_1 g_2)\cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$ y $e \cdot m = m$ con e ident. de G].

TAL ACCIÓN ES LLAMADA UN ACCIÓN POR IZQUIERDA. *

* TAMBIÉN LA INFORMACION DE $G \circlearrowright M$ se EMPAQUE POR UN APLICACIÓN DIFERENCIABLE $G \times M \to M$, $(g,m) \mapsto g \cdot m$. *

un grupo de Lie actuando sobre M INDUCE UN PARTICIÓN de M en LAS ÓRBITAS de la acción:



$$[m] = G \cdot m := \{ g \cdot m : g \in G \} \subset M$$

QUE CORRESPONDE A LA RELACIÓN de equivalencia: $m_1 \sim m_2 \iff \exists g \in G$ con $m_1 = g \cdot m_2$.

LA TEOREMA FUNDAMENTAL SOBRE ACCIÓNES DIFERENCIABLES ES:

(*) si $G \circlearrowright M$ es un ACCIÓN DIFF., LIBRE, y ADECUADO, ENTONCES el cuociente $M/G = \{[m] : m \in M\}$ es un VARIEDAD de dimensión $\dim(M) - \dim(G)$. ADEMAS, $M \to M/G$ es un SUBMERSIÓN.

* ver: SHARPE, APPENDIX E PARA UNA DEMONSTRACIÓN. RECUERDA UN ACCIÓN ES LIBRE CUANDO $G \xrightarrow{\phi} \mathrm{Diff}(M)$ es inyectiva ($g \cdot m = m \ \forall m \in M \Rightarrow g = e$), y ADECUADA CUANDO $\forall K \overset{\text{compacto}}{\subset} M \Rightarrow \{ g \in G : gK \cap K \neq \emptyset \} \subset G$ es compacto. *

* IMPORTANTE APLICACIÓN de (*) es PARA UN SUBGRUPO H de G que es cerrado en la topología de G. TENEMOS $H \circlearrowright G$ POR: IZQUIERDA $h \mapsto L_h$ ó DERECHA $h \mapsto R_{h^{-1}}$ QUE CONDUCEN A LAS VARIEDADES CUOCIENTES $H\backslash G := \{Hg\}$ ó $G/H := \{gH\}$.

NOTAR QUE UN EQUIVALENTE CARACTERIZACIÓN de ACCIÓN ADECUADO es CUANDO PRE-IMAGENES DE CONJUNTOS COMPACTOS SON COMPACTOS PARA LA APLICACIÓN:

$$G \times M \to M \times M \ ; \ (g,m) \mapsto (g \cdot m, m).$$

* UN ESPACIO HOMOGENEA ES UN VARIEDAD M CON ACCIÓN $G \circlearrowright M$ QUE ES TRANSITIVA: M/G es un PUNTO ($\forall m_1, m_2, \exists g \in G$ con $g \cdot m_1 = m_2$)

EN TAL CASO TENEMOS UNA BIYECCIÓN:

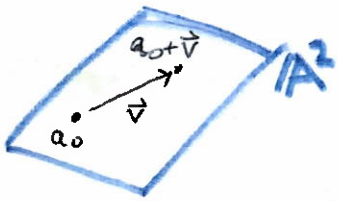
$$M \longleftrightarrow G/G_{m_0} \qquad gG_{m_0} \longleftrightarrow g \cdot m_0$$

DONDE $m_0 \in M$ es un 'PUNTO BASE' fijado, y

$$G_{m_0} := \{ g \in G : g \cdot m_0 = m_0 \} \text{ es LA ISOTROPIA por } m_0 \; (G_{m_0} \approx G_{m_1})$$

CUANDO $G_{m_0} \subset G$ es cerrado la IDENTIFICACIÓN $M \approx G/G_{m_0}$ es un DIFFEOmorfismo.

+ UN ESPACIO AFINA de dimensión n es un VARIEDAD, $\mathbb{A}^n$, de dimension n con un ACCIÓN TRANSITIVA DE UN ESPACIO vectorial, V^n, de dimensión n t.q. las grupos de isotropia son TRIVIALES ($\{0\}$).



Se CAPTURA LA NOCIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL SIN ORIGEN SPECIFICADO, ya que TENEMOS — por escoge de UN PUNTO BASE $a_0 \in \mathbb{A}^n$ UN IDENTIFICACIÓN;

$$\mathbb{A}^n \approx V^n = V^n / V_{a_0} = \{0\} .$$

+ LAS ESFERAS de dimensión n, S^n, son espacios homogeneos con acción TRANSITIVA DE SO_{n+1} y ISOTROPIA SO_n,

ENTONCES $S^n \approx SO_{n+1}/SO_n$.

p_0, isotropía SO_2 = rot. alrededor p_0-eje

+ Grassmanianas (INCLUYENDO LOS ESPACIOS PROYECTIVAS) son ESPACIOS HOMOGENEOS, p.ej. con LA ACCIÓN DE O_{n+1} SOBRE $\mathbb{G}(k,n)$ (las $k+1$ dim. SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^{n+1}$) SEANDO $\vec{\sigma}_{k+1} \mapsto g(\vec{\sigma}_{k+1})$, lo que es transitivo. Los grupos de isotropía son $\approx O_{k+1} \times O_{n-k}$, ENTONCES $\mathbb{G}(k,n) \approx O_{n+1}/O_{k+1} \times O_{n-k}$.

+ NOTAR QUE HAY VARIAS MANERAS (DE MENUDO) IDENTIFICAR UN ESPACIO HOMOGENEO CON UN COCIENTE. p.ej. TAMBIÉN $S^n \approx O_n / O_{n+1}$,
ó $\mathbb{A}^n \approx \mathrm{Aff}(n)/GL_n$, donde $\mathrm{Aff}_n = GL(V) \ltimes V$ ACTUA SOBRE $\mathbb{A}^n$
por (ESCOGIENDO UN PUNTO BASE a_0) $(A, \vec{w}) \cdot (a_0 + \vec{v}) := a_0 + A\vec{v} + \vec{w}$.

+ LAS geometrías de KLEIN, CONSISTE EN ESTUDIAR 'NOCIONES INVARIANTES' SOBRE G/H BAJO LA ACCIÓN $G \circlearrowright G/H \quad g \cdot (xH) := gxH$.

p.ej. • en LA geometría AFINA; Aff_n / GL_n; NOCIONES DE CENTRO DE MASA son RELEVANTES, ya que son INVARIANTES BAJA Aff_n. ($\frac{\sum m_j a_j}{\sum m_j}$ con $m_j \in \mathbb{R}_{>0}$ y $a_j \in \mathbb{A}^n$)

• EN LA geometría EUCLIDIANO (geometría afina cuando V tiene producto INTERIOR $\langle , \rangle$)
$E^n = E_n / O_n$ con $E_n = O(V) \ltimes V$, NOCIONES DE ANGULO, DISTANCÍA son INVARIANTE

• EN LA geometría esferical; SO_{n+1}/SO_n; NOCIONES DE Angulos y longitud de arco a lo largo gran círculos son INVARIANTES.

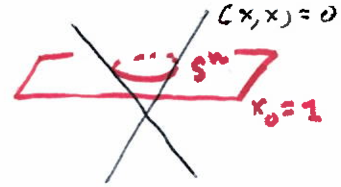
3) CONSIDERAMOS UN EJEMPLO CLÁSICA de la geometría de círculos (en el plano), ó $(n-1)$-esferas en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbb{R}^{n+2}_1$ un ESPACIO 'LORENTZIANO', es decir espacio vectorial de dim $n+2$ CON PRODUCTO INTERIOR SIGNATURA $(1, n+1)$. ENTONCES EXISTE BASE TAL QUE TAL PRODUCTO SEA DADO POR:

$$(x,y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1}.$$

EN PARTICULAR, LA ESFERA S^n es NATURALMENTE IDENTIFICADO CON

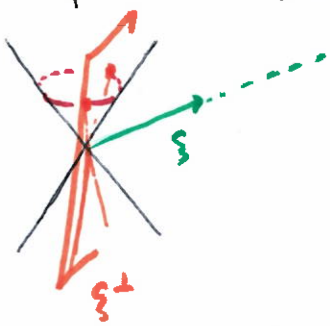
$$\mathbb{P}\{(x,x)=0\} \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^{n+2}_1 \approx \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$$



POR $\{(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) : \sum X_j^2 = 1\} = S^n \longleftrightarrow (1 : X_1 : \dots : X_{n+1})$

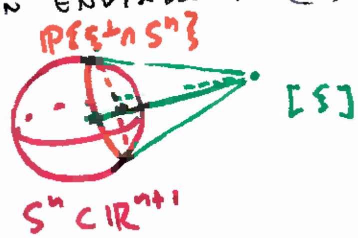
ASOCIAMOS $(n-1)$-esferas en S^n CON PUNTOS $[\xi] \in \mathbb{P}\mathbb{R}^{n+2}_1$ CON $(\xi,\xi)>0$ USANDO POLARIDAD RESPETO AL FORMA LORENTZIANA $(\cdot,\cdot)$:

$$[\xi] \longleftrightarrow \mathbb{P}\{\xi^\perp \cap (x,x)=0\} \subset S^n$$

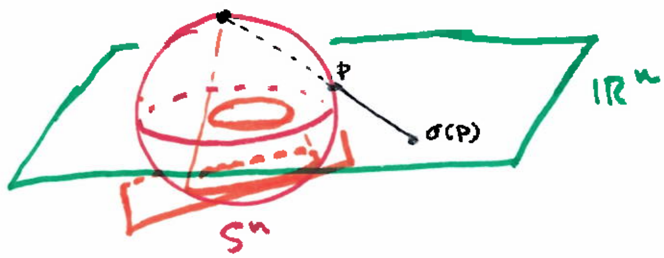


DONDE $\xi^\perp$ es TOMADO RESPETO A $(\cdot,\cdot)$.

BAJO UN PROYECCIÓN ESTEREOgráfica, TALES $(n-1)$-esferas SON ENVIADOS A $(n-1)$-esferas en $\mathbb{R}^n$ (o hiperplanos).



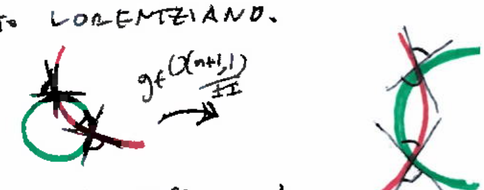
,



S^{n-1} esfera en S^n
$=$
$\sigma(S^n \cap \text{plano})$
es un S^{n-1} esfera en $\mathbb{R}^n$.

AHORA, TENEMOS LAS siguientes OBSERVACIONES:

* el espacio de $(n-1)$-esferas en $\mathbb{R}^n$ y hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ es identificado CON $\{(x,x)=1\} \subset \mathbb{R}^{n+2}_1$ (de dimensión $n+1$) MODULO $x \sim -x$
* tiene UN ACCIÓN POR EL grupo $O(n+1,1)/_{\pm I}$ DONDE $O(n+1,1)$ SON TRANSFORMACIONES LINEALES QUE PRESERVAN EL PRODUCTO LORENTZIANO.
  - ESTE ACCIÓN ES TRANSITIVA
  - PRESERVA ANGULOS DE INTERSECCIÓN y TANGENCÍA.



* EL grupo $O(n+1,1)/_{\pm I}$ ACTUA SOBRE LA ESFERA $S^n = \mathbb{P}\{(x,x)=0\}$, SE LLAMAN LAS TRANFORMACIONES DE MÖBIUS DE LA ESFERA, ó grupo CONFORMAL DE S^n debido a que preservan ANGULOS EN LA ESFERA.

ALGO NO-TRIVIAL ES QUE TODOS APLICACIONES CONFORMALES DE S^n $(n \geq 2)$ O APLICACIONES DE $\mathbb{R}^n$ preservando $(n-1)$-esferas son de tal forma.

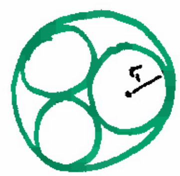
* uno puede extender la descripción de esferas y hiperplanos arriba a tomar cuenta de orientación: la geometría de esferas de Lie.

La construcción consiste de la siguiente extensión:

- $\mathcal{C} := \{(x,x)=0\} \subset \mathbb{R}^{n+2}_1$, $\mathcal{C}\ell := \mathbb{P}\{x : (x,x)>0\} \cong \mathbb{P}H = H/_{\xi\sim-\xi}$ con $H := \{(x,x)=1\} \subset \mathbb{R}^{n+2}_1$. De arriba, $\mathcal{C}\ell$ es el espacio de S^{n-1} esferas en S^n y dos puntos $\pm\xi\in H$ presentan la misma esfera (polaridad respeto a $(\cdot,\cdot)$).
- Sea $\mathbb{R}^{n+3}_2$ con metrica de signatura $(2,n+1)$ $\langle X,X\rangle := -X_0^2+X_1^2+\dots+X_{n+1}^2-X_{n+2}^2$. Pon $\hat{\mathcal{C}} = \{\langle X,X\rangle=0\}\subset\mathbb{R}^{n+3}_2$, y $Q=\mathbb{P}\hat{\mathcal{C}}\subset\mathbb{P}\mathbb{R}^{n+3}_2$ la quadratica de Lie. Tenemos $H \hookrightarrow Q$, $x\in H\mapsto (x:1)\in Q$.
- un punto de Q esta asociado con un punto de H (que corr. a un orientación de los dos escoges $\pm\xi$ presentando $S^{n-1}_{[\xi]}$) o un punto de S^n (si es de la forma $(x:0)$). Para más detalles, ver p.ej. el libro de Cecil: Lie Sphere Geometry.

Tales transformaciones son útil por ejemplo en esudiando gasquets de Appolonio, ó esferas besando:

gasquet de Appolonio.



círculos besando. La teorema de Descartes (según leyenda para impresionar una mujer) dice:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

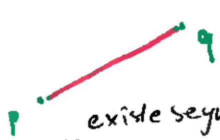
donde r_j son radios de los circulos mutuamente tangentes. Era redescubierto por Soddy, quien lo publicó en forma de una poema "The Kiss Precise" y generalizado a dimensiones arbitrarias y espacios de curvatura constante por Gosset y Lunnon resp.

---

4) El enfoque clasical a geometría he sido axiomatico y 'intuitiva' en el sentido que ciertos terminos se dejan los definiciones al sentido común (como 'punto' y 'línea'). Ahora podriamos decir tal enfoque consiste de dando un modelo: sea S un conjunto (el espacio) cuyos elementos son puntos y equipado con unos subconjuntos especificados (líneas) que satisfacen varias propiedades. Ademas tal geometría podría ser equipado por la estructura de varias funciones de distancia o medir de angulos sujeto a ciertas axiomas.

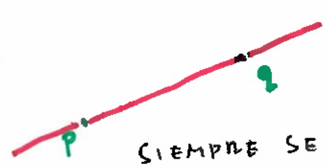
Mucho esfuerzo era hizo sobre 'mostrar' el (5) axioma ó postulato de Euclid de los primer 4:

E1)



existe segmentos de lineas entre cada dos puntos.

E2)



Siempre se puede extendir un segmento (a una linea infinito).

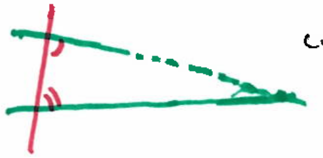
E3)

EXISTE CÍRCULOS ALREDEDOR CUALQUIER PUNTO DE RADIO ARBITRARIA (positivo)

E4)

TODOS ÁNGULOS RECTOS SON IGUALES ($\alpha = \beta$).

E5)

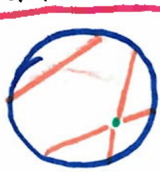


CUANDO LA SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES ES MENOS QUE π, las líneas intersectan. $\Longleftrightarrow$ $\tilde{E5}$)

DADO UN PUNTO p y línea ℓ, $\exists!$ línea $\tilde{\ell}$ pasando por p t.q. $\ell \cap \tilde{\ell} = \phi$

* NOTAR QUE E2, E3 SON AXIOMAS COMO 'NO-COMPACTICIDAD DEL ESPACIO.
p.ej. LA geometría ESFERICAL (BIEN CONOCIDO EN ANTIGUA DEBIDO A LA ASTRONOMÍA) SATISFACE E1, E2, E4, pero <u>NO</u> E5. *

LOS TRABAJOS DE Saccheri, Bolyai, Lobachevsky, Gauss, ... CONSIDERAN LAS CONSECUENCIAS DE ASUMIR E1)–E4) y NO $\tilde{E5}$) en el SENTIDO QUE $\exists \infty$ $\tilde{\ell}$'s. (en contraste a geometría esférica para que $\nexists$ $\tilde{\ell}$'s). De hecho Saccheri INTENTÓ MOSTRAR $\tilde{E5}$) de E1)–E4) POR CONTRADICCIÓN – diciendo las figuras OBTENIDA INSULTA DIOS. EMPEZAMOS CON EL PRIMER MODELO, el <u>MODELO DE BELTRAMI-KLEIN</u>:



PUNTOS SON LOS INTERIOR A UN CÍRCULO (UNITARIO), LINEAS SON CUERDAS DEL CÍRCULO.

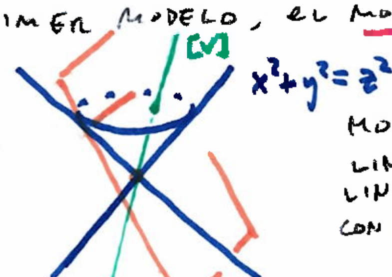
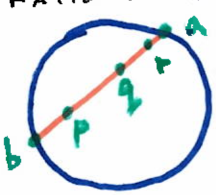


FIGURA PROYECTIVA DEL MODELO B-K: PUNTOS SON LINES INTERIOR AL CONO, LINEAS SON PLANOS INTERSECTADO CON INTERIOR DEL CONO.

EL MODELO TIENE E1) y NO $\tilde{E5}$), para los otros, necesitamos INTRODUCIR NOCIONES DE DISTANCIA y ÁNGULO. HAY UN NATURAL grupo de TRANSFORMACIONES PRESERVANDO LINEAS: $PSO_{2,1}$ enviando $[v] \mapsto [Av]$ donde $A : \mathbb{R}^3 \circlearrowleft$ es lineal y preserva $x^2+y^2=z^2$. QUEREMOS un distancia INVARIANTE BAJO TAL ACCIÓN. BIEN CONOCIDO, LA RATIO DE CRUZ DE 4 PUNTOS (colineales) ES INVARIANTE. TENEMOS:



$$[p,q;a,b] := \frac{|ap|\,|qb|}{|aq|\,|pb|}$$

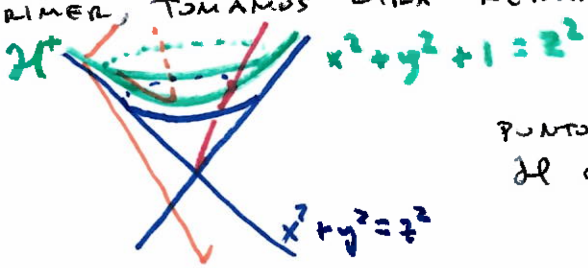
INVARIANTE BAJO $SO_{2,1}$

OBSERVA: $[p,p;a,b] = 1$

$$[p,q;a,b] \cdot [q,r;a,b] = [p,r;a,b]$$

ENTONCES $\mathrm{dist}(p,q) := c^2 \log[p,q;a,b]$ (con $c \neq 0$ CONSTANTE) PARA QUE TENEMOS E1)–E3) pero $\cancel{E5}$). ADEMAS, LA geometría es 'SENCILLA' en el SENTIDO QUE ADMITE "gran" grupo de simetrías, $SO_{2,1}$. En PARTICULAR, es un ESPACIO <u>HOMOGENEO</u>. QUEDA DESCRIBIR ÁNGULOS, PARA QUE VAMOS A CONSIDERA OTROS MODELOS EQUIVALENTES, PERO MÁS FÁCIL EN PRÁCTICA.

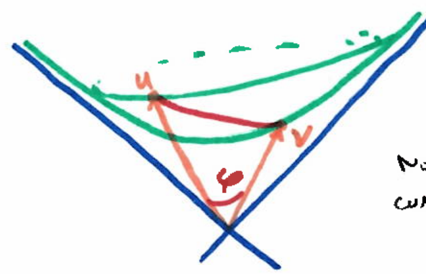
PRIMER, TOMAMOS OTRA REBANADO EN LA FIGURA PROYECTIVA:



PUNTOS SON PUNTOS de $\mathcal{H}$, líneas son INTERSECCIONES DE $\mathcal{H}$ con PLANOS pasando por el origen.

EN ESTE <u>MODELO HIPERBOLOIDE</u>, TENEMOS EL MISMO grupo de simetrías, $SO_{2,1}$, y la expresión para la distancia toma LA FORMA:

$\mathcal{H}^+ = \{(x,x)=1\}$



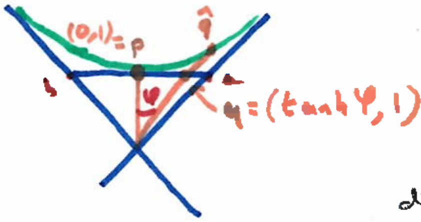
$\cosh\varphi = \lambda^2(u,v)$

NOTAR LA SIMILARIDAD CON geometría ESFERICAL.

$\text{dist}(u,v) = \varphi$

DONDE $\cosh\varphi = \lambda^2(u,v)$ (algún const. λ), y

$(\cdot,\cdot)$ es el producto INTERIOR LORENTZIANA de signatura $(1,2)$: $(\vec{x},\vec{x}) = -x^2 - y^2 + z^2$

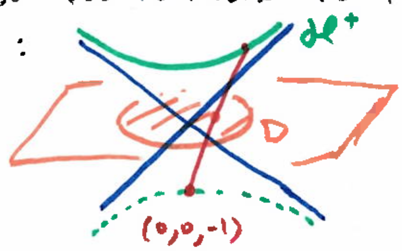


* PARA ESTABLIR LA EXPRESIÓN PARA DISTANCÍA EN TERMINOS DE φ, ES SUFICIENTE CONSIDERAR EL CASO CUANDO $p, q \in$ yz-plano (el espacio es homogeneo!) y $p = (0,1)$, $q = (\tanh\varphi, 1)$.
AQUI TENEMOS $[p,q;a,b] = (\cosh\varphi + \sinh\varphi)^2 = e^{2\varphi}$, entonces $\text{dist}(p,q) = 2c^2\varphi$. ES CONVENIENTE AHORA TOMAR $\underline{c^2 = \frac{1}{2}}$, PARA QUE $\underline{\lambda^2 = 1}$. *

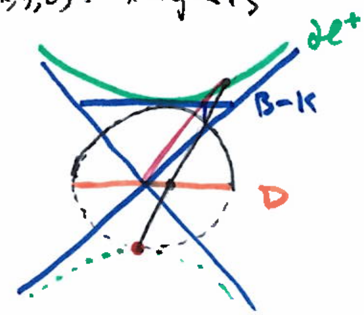
LA DISTANCÍA AQUI ES FACIL ASOCIAR A UN MÉTRICA (PROD. INTERIOR) QUE NOS DA CONCEPTOS DE ÁNGULOS, AREA,... A SABER LA RESTRICCIÓN DE $dx^2 + dy^2 - dz^2 \big|_{T\mathcal{H}^+}$.
EN COORDENADAS $\{(\sinh\varphi\cos\theta, \sinh\varphi\sin\theta, \cosh\varphi)\} = \mathcal{H}^+$, TENEMOS

$$d\varphi^2 + \sinh^2\varphi \, d\theta^2 = ds^2 .$$

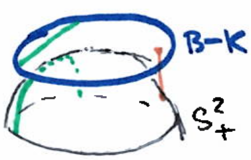
FINALMENTE, CONSIDERAMOS DOS MODELOS DE POINCARÉ. PROYECCIONAMOS $\mathcal{H}^+$ a UN DISCO DE SU "POLO SUR":



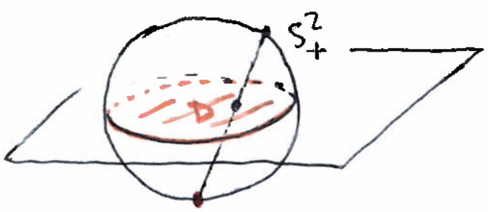
DONDE $D = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 < 1\}$



TAL PROYECCIÓN ES LA COMPOSICIÓN DE LAS SIGUIENTES DOS:

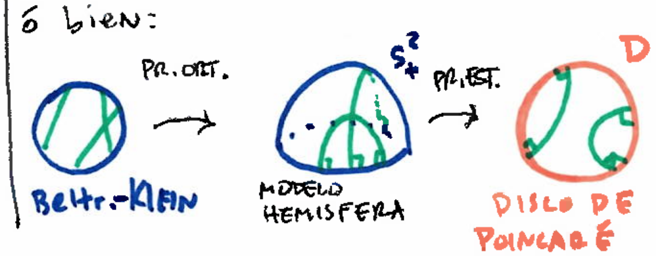


proyección ORTOGONAL DE B-K A UN HEMI-ESFERA ARRIBA.



PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICAL DE S_2^+ á D.

ó bien:



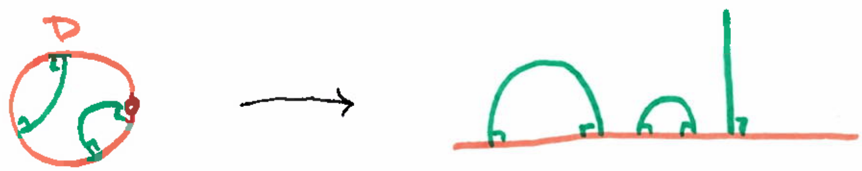
EL MODELO EN ESTE DISCO UNITARIO ES EL <u>DISCO DE POINCARÉ</u>. POR PROPIEDAD DE PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA preservando ángulos y enviando círculos a círculos, las líneas SON INTERSECCIONES DE D con círculos del plano <u>ORTOGONAL</u> á ∂D.

* el grupo de simetría convierte A $SU(1,1)$ actuando por transformaciones DE Möbius

* LA MÉTRICA, $dx^2+dy^2-dz^2|_{\partial\ell^+}$, en D se expresa por:

$$\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-(x^2+y^2))^2} \qquad (*)$$

DE MENUDO UNO USE EL MODELO SEMIPLANO SUPERIOR de POINCARÉ, que UNO OBTIENE POR APLICANDO UN TRANSFORMACIÓN de Möbius del plano tomando $D \to H = \{(x,y) : y>0\}$. (p.ej. EN NOTACIÓN COMPLEJA $z \mapsto i\cdot\frac{1+z}{1-z}$)



$\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ $\qquad$ $\{w : \mathrm{Im}\, w > 0\}$

$$z \longmapsto w = i\cdot\frac{1+z}{1-z}$$

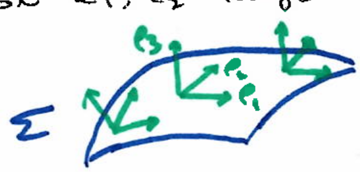
LA MÉTRICA (*) SOBRE H TOME LA FORMA: $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ ($w=x+iy$; $y>0$).

y el grupo de simetrías a $Sl_2(\mathbb{R})$ ACTUANDO POR TRANSFORMACIONES DE Möbius: $w \longmapsto \dfrac{aw+b}{cw+d}$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ $\quad ad-bc=1$.

---

5) Por aplicación de formas diferenciales, revisitamos SUPERFICIES EN $\mathbb{E}^3$ CON MARCOS MOVILES.

PARA CADA $p\in U \overset{\text{ab.}}{\subset} \Sigma$, sea $e_1(p), e_2(p), e_3(p)$ UN BASE ORTONORMAL de $\mathbb{R}^3$ con e_1, e_2 tangente a Σ (ENTONCES $e_3=\nu$ NORMAL)



SIMILAR AL ESTUDIO DE CURVAS en $\mathbb{E}^3$ CON MARCA de FRENET-SERRET, QUEREMOS DESCRIBIR LA geometría LOCAL DE Σ EN COMO TAL MARCO 'gira' o 'vorta'. NOTAR QUE EN ESTE CASO HAY AMBIGüedad en APLICANDO ROTACIONES ALREDEDOR $e_3=\nu$ a la MARCA — ENTONCES BUSCAMOS CANTIDADES INDEPENDIE DE TAL AMBIGUIDAD.

CALCULAMOS, para ω^j BASE DUAL de $\mathbb{R}^3$ a e_j (ENTONCES $\omega^1, \omega^2 \in \Omega^1(\Sigma)$ y $I=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$) y $de_j =: \omega_j^k e_k$ (PARA $\omega_j^k \in \Omega^1(\Sigma)$) que:

- $e_i\cdot e_j=\delta_{ij} \Rightarrow de_i\cdot e_j + e_i\cdot de_j = 0 \Rightarrow \omega_i^j = -\omega_j^i \quad (*)$
- $0 = d^2 e_j = d\omega_j^k e_k - \omega_j^k \wedge de_k = (d\omega_j^k - \omega_j^\ell\wedge\omega_\ell^k)e_k \Rightarrow d\omega_j^k = \omega_j^\ell\wedge\omega_\ell^k \quad (*)$
- en CUALQUIER PARAM. LOCAL φ de Σ, $d\varphi = \varphi^*(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) \Rightarrow$

$$0 = d(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) = d\omega^a e_a - \omega^a \wedge de_a = (d\omega^a - \omega^b\wedge\omega_b^a)e_a + (\omega^a\wedge\omega_a^3)e_3$$

con $a,b \in \{1,2\}$

$$\Rightarrow \quad d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a \,, \quad \omega^a\wedge\omega_a^3 = 0 \qquad (*)$$

$$a,b\in\{1,2\}$$

LAS ECUACIONES ARRIBA SON LLAMADOS ECUACIONES ESTRUCTURAL DE CARTAN, y las formas ω_b^a LAS FORMAS DE CONEXION. AHORA LOS CONECTAMOS A LA GEOMETRÍA DE Σ:

- TENEMOS $-d\nu = \omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2$ en el OPERADOR DE FORMAS, y $II = (\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2)\cdot(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) = \omega_j^3 \otimes \omega^j$, que gracias a $(*)$ es symetrica y dado por $II = \omega_j^3 \cdot \omega^j$.
- LA CURVATURA GAUSSIANA, $K = \det(-d\nu)$ esta dado por

$$K = \omega_1^3\wedge\omega_2^3(e_1,e_2) \,, \quad \text{ó bien} \quad K\omega^1\wedge\omega^2 = d\omega_2^1 \qquad (*)$$

(usando $(*)$) NOTAR QUE $\omega^1\wedge\omega^2$ es el forma de AREA de Σ.

- SIMILARMENTE, LA CURVATURA MEDIA ESTA DADO POR $2H = \omega_j^3(e_j)$.

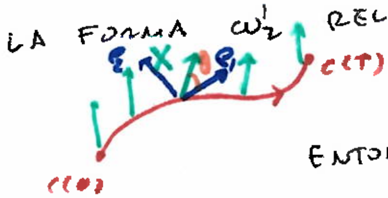
ECUACIONES $(*)$, $(*)$ CONSTITUTE DE LA TEOREMA Egr. de Gauss, ya que $I = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ y CONDUCEN A UNA MANERA PRACTICA PARA CALCULAR K. p.ej. con

$$\frac{dx^2+dy^2}{y^2} \Rightarrow \omega^1 = \frac{dx}{y} \,, \quad \omega^2 = \frac{dy}{y}$$ en un escoge de MARCA ORTONORMAL

ENTONCES, $d\omega^1 = -\omega^2\wedge\omega^1$, $d\omega^2 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \omega_2^1 = -\omega_1^2 = -\omega^1$

$$\Rightarrow d\omega_2^1 = -\omega^1\wedge\omega^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} K = -1 .$$

LA FORMA ω_2^1 RELACIONA CON LA HOLONOMÍA DEL TRANSPORTE PARALELO:



SEA X UN CAMPO VECTORIAL A LO LARGO LA CURVA c que es parallelo, y $\theta(t)$ el angulo entre $X(t)$ y $e_1(t) = e_1(c(t))$.

ENTONCES:

$$\int_c \omega_2^1 = \Delta\theta = \theta(T) - \theta(0) .$$

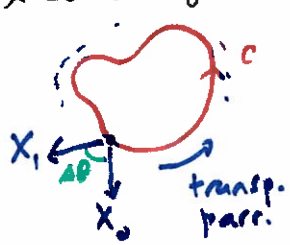
que uno verifique en considerar que $\nabla_{\dot c} X = pr_{T\Sigma}\dot X = 0 \Rightarrow \|X\| = cst$

wlog

$$\Rightarrow X = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \Rightarrow \dot X = (-\sin\theta\,\dot\theta + \sin\theta\,\omega_2^1(\dot c))e_1 + (\cos\theta\,\dot\theta - \cos\theta\,\omega_2^1(\dot c))e_2 + (\cos\theta\,\omega_1^3(\dot c) + \sin\theta\,\omega_2^3(\dot c))e_3$$

so $pr_{T\Sigma}\dot X = 0 \Rightarrow \dot\theta = \omega_2^1(\dot c)$.

* EN PARTICULAR, CUANDO c es cerrada, $\Delta\theta$ no depende por escoge de MARCA. TAL CAMBIO EN Angúlo asociada a transportar PARALELMENTE A LO LARGO UN LAZO NOS LLAMAN LA HOLONOMÍA del LAZO. TENEMOS:

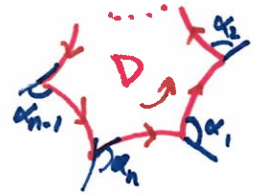


$$\Delta\theta = Hol(c) = \oint_c \omega_2^1 = \int_D K\omega^1\wedge\omega^2$$

cuando el lazo c encierra la región D (por STOKES y $(*)$).

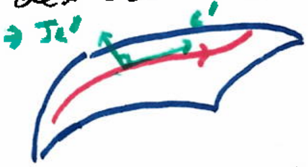
* LA FORMULA DE HOLONOMÍA (Ó MÁS PRECISO, LA DE $\int_c \omega_2^1 = \Delta\theta$), CONDUCE A TEOREMA LOCAL de GAUSS-BONNET:

$$(*) \quad \int_D K\omega^1\wedge\omega^2 + \int_{\partial D} K_{geo}\, ds + \sum \alpha_j = 2\pi$$



DONDE D es UN REGIÓN COMPACTO Y SIMPLE CONEXO CON FRONTERA SUAVE A TROZOS Y ANGÚLOS EXTERIORES α_j.

RECORDAMOS QUE PARA $c(s)$ param. por longitud del arco ($\lVert c'(s)\rVert = 1$), TENEMOS: $K_{geo}(s) = c''(s) \cdot Jc'(s)$



donde $Jc'(s) \in T_{c(s)}\Sigma$ es $\perp$ á $c'(s)$.

Sigue (*) de considerar $c'(s) = \cos\theta(s)\, e_1(s) + \sin\theta(s)\, e_2(s)$ y diferenciando a obtener: $c''(s) = \left(\theta'(s) - \omega_2^1(c'(s))\right) Jc'(s) + \left(\omega_2^3(c'(s)) + \omega_1^3(c'(s))\right) e_3$

$$\Rightarrow K_{geo}(s) = \theta'(s) - \omega_2^1(c'(s)).$$

EN PARTICULAR, de (*) UNO OBTIENE LA TEOREMA global de GAUSS-BONNET:

$$\int_\Sigma K\, dA + \int_{\partial\Sigma} K_{geo}\, ds = 2\pi\chi(\Sigma) \qquad (*)$$

CUANDO Σ esta compacto y donde $\chi(\Sigma)$ es el característica de Euler de Σ.

A OBTENER (*), UNO PUEDE CONSIDERAR UN TRIANGulación de Σ y aplica (*) a los triangulos. Recordar EL CARACTERISTICO de EULER POR UN SUPERFICIE TRIANGULADO es $\chi_T(\Sigma) := v - e + f$ donde v es el numero de vertices, e el número de lados ('edges') y f el numero de caras ('faces') en TAL TRIANGULACIÓN. p.ej.

χ () $= 4 - 6 + 4 = 2 = 6 - 12 + 8 = \chi$ ()

$\chi_T(\Sigma)$ NO DEPENDE POR LA TRIANGULACIÓN, y al LA FORMULA (*) MUESTRA QUE NO DEPENDE POR LA METRÍCA, MÁS BIEN SOLO LA TOPOLOGÍA. p.ej. debido á $\chi(S^2) = 2$, al mismo tiempo que el 'curvatura total' inmediatamente sabemos no existe métricas SOBRE LA esfera con curvatura Gaussiana ≤ 0.

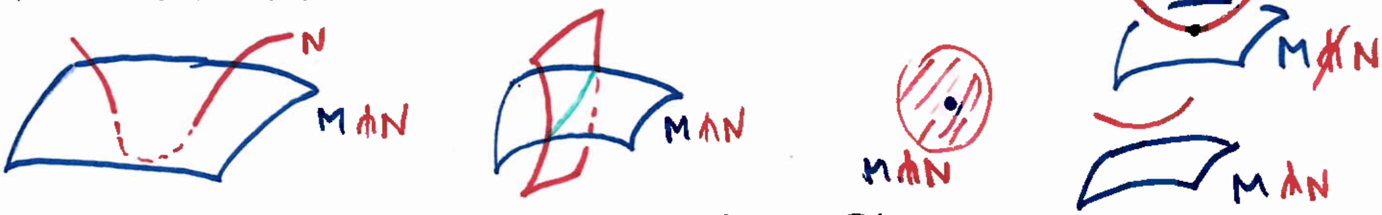
---

6) UN POCO DE TOPOLOGÍA diferencial: sea M, N, P variedades con $\dim M + \dim N \geq \dim P$

- TRANSVERSALIDAD: dos aplicaciones (diff.) $f: M \to P$, $g: N \to P$ son TRANSVERSALES $f \pitchfork g$, si para cada $m \in M$, $n \in N$ con $f(m) = g(n) = p$, tenemos

$$df(T_m M) + dg(T_n N) = T_p P.$$

* TAMBIÉN APLICA EL CONCEPTO de TRANSVERSALIDAD A SUBVARIEDADES $M, N \subset P$
en considerar las inclusiones $i_M, i_N : M, N \longrightarrow P$. ESCRIBIMOS
$M \pitchfork N$ $(i_M \pitchfork i_N)$ ó $f \pitchfork N$ $(f \pitchfork i_N)$.



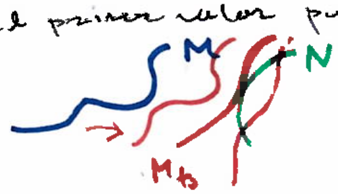
* TENEMOS siguiente INTERPRETACIÓN geométrica ~~por~~ IFT:
$f \pitchfork g \Rightarrow f^{-1}(\mathrm{im}\, g) \overset{\text{subvar.}}{\subset} M$, $g^{-1}(\mathrm{im}\, f) \overset{\text{subvar.}}{\subset} N$, ó cuando $M, N \subset P$
$M \pitchfork N \Rightarrow M \cap N$ subvariedad de M, N.
LA DIMENSIÓN de tal intersección es $\dim P - \dim M - \dim N$ y su espacio tangente
es (para $M, N \subset P$) $T_pM \cap T_pN$. NOTAR QUE PARA UN PUNTO $p \in P$ QUE
$f \pitchfork p$ es el mismo que p sea un valor regular de f ($d_m f$ surjectiva
cada $m \in f^{-1}(p)$) ó bien f es un SUBMERSIÓN alrededor p.

- HOMOTOPÍA: UNA 'DEFORMACIÓN' ó 'PERTURBACIÓN' de un APLICACIÓN SEA UN COLLECIÓN
$h_t : M \longrightarrow P$ (~~dif~~ p.g. $t \in [0,1]$) con $h_0 = f$, ó bien
$h : [0,1] \times M \longrightarrow P$ diferenciable con $h|_{\{0\} \times M} = f$. Digamos f es
'deformable' ó homotópica a todos h_t's, en PARTICULAR $h_1 =: \tilde{f}$ y
escribimos $f \sim \tilde{f}$ (es un RELACIÓN DE EQUIVALENCIA).

* se puede aplicar a subvariedad $M \subset P$, para
decir $M \sim \tilde{M}$ son homotópicas cuando $i_M \sim f$ y $\mathrm{im}\, f = \tilde{M}$.

STABILIDAD DE INTERSECCIONES TRANSVERSALES:
Sea M ó N compacto y $f \pitchfork g$. ENTONCES para cada homotopía, h_t, de f
existe $\varepsilon > 0$ t.q. $h_t \pitchfork g$ $0 \leq t < \varepsilon$.

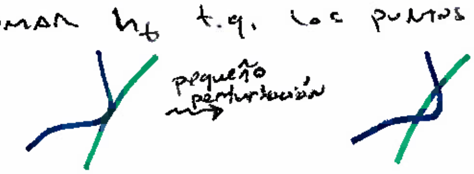
ó "tangencias pueden SER DESTRUIDOS BAJO PEQUEÑOS PERTURBACIONES, PERO INTERSECCIONES
TRANSVERSALES PERSISTEN." p.ej. sea $M, N \subset P$ con $M \cap N = \emptyset$ y considera una
homotopía M_t de M con t_0 el primer valor para que $M_{t_0} \cap N \neq \emptyset$. ENTONCES
M_{t_0} es tangente Á N.



- PRIMER PUNTO DE CONTACTO BAJO UN MOCIÓN SON TANGENTES.

GENERICIDAD DE INTERSECCIONES TRANSVERSALES (THOM):
PARA CADA f, g, existe UNA HOMOTOPÍA h_t de f t.q. $h_t \pitchfork g$, $t > 0$.

ADEMÁS, CUANDO $\dim M + \dim N = \dim P$ UNO PUEDE TOMAR h_t t.q. LOS PUNTOS
de INTERSECCIÓN ~~[illegible]~~ son AISLADOS.
ó bien "UN PEQUEÑO ZANGOLOTEO destruye tangencias!"



AHORA, PARA $f \pitchfork N$ y $\dim M + \dim N = \dim P$ (entonces $f^{-1}(N)$ es un conjunto discreto de puntos) y con M, N, P orientados, DEFINIMOS:

$$\mathrm{int}(f, N) := \sum_{m \in f^{-1}(N)} \mathrm{int}_m(f, N)$$

$M \bullet N = 0$

el numero de intersección de f con N, donde $\mathrm{int}_m(f,N) = \pm 1$ con signo $+$ cuando $d_mf(v_1), \dots, d_mf(v_{\dim M}), u_1, \dots, u_{\dim N}$ es un BASE ORIENTADO de P PARA $v_1, \dots, v_{\dim M}$; $u_1, \dots, u_{\dim N}$ BASES ORIENTADAS de M, N.

PONEMOS $M \bullet N := \mathrm{int}(i_M, N)$ cuando $M \subset P$ también. NOTAR QUE $M \bullet N = (-1)^{\dim M \cdot \dim N} N \bullet M$, y con este notación $\mathrm{int}(f,N) = \mathrm{im}(f) \bullet N$.

Se puede extender a intersecciones no transversales debido a si $f \pitchfork N$ y $\tilde{f} \sim f$ con $\tilde{f} \pitchfork N$ uno tiene $\mathrm{int}(f,N) = \mathrm{int}(\tilde{f}, N)$.

Entonces cuando $f \not\pitchfork N$ uno aplica genericidad de THOM para obtener $\tilde{f} \sim f$ con $\tilde{f} \pitchfork N$ y ponemos $\mathrm{int}(f,N) := \mathrm{int}(\tilde{f}, N)$.

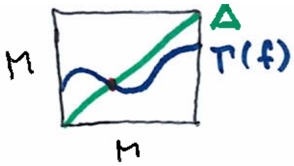
* cuando variedades no son orientadas uno todavía tiene un numero de int. invariante bajo homotopía en sumando el numero de puntos modulo 2. *

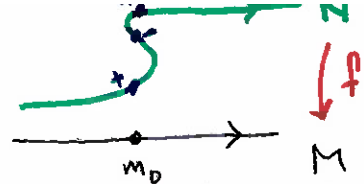
Un numero de invariantes topologicas / homotopicos uno define con numero de intersección, por ejemplo:

+ Numero de Lefschetz de un aplicación $M \xrightarrow{f} M$ es
$L(f) := \Gamma(f) \bullet \Delta$ donde $\Gamma(f), \Delta \subset M \times M$ son la gráfica de f y el diagonal. Cuando $L(f) \neq 0$, f tiene (al menos) un punto fijado y para $f \sim \tilde{f}$, $L(f) = L(\tilde{f})$. En particular, se puede mostrar la teorema de Brouwer: cada $f: D^n \circlearrowleft$ con $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ tiene punto fijo; por mostrando cada $f: D^n \circlearrowleft$ es deformable a un aplicación constante.

+ Indece de un campo vectorial $M \xrightarrow{X} TM$ es
$\mathrm{ind}(X) := \Gamma(X) \bullet \Gamma(0)$ donde $\Gamma(X) = (m, X(m)) \subset TM$ y $\Gamma(0) = (m, 0) \subset TM$, entonces cada dos campos vectoriales tienen $\Gamma(X) \sim \Gamma(Y)$ por $(1-t)X(m) + tY(m)$, $\mathrm{ind}(X)$ no depende del campo, solo de M. (De hecho es igual al característica de Euler: $\mathrm{ind}(X) = \chi(M)$). En particular $\chi(S^{2k}) \neq 0$ implica cada $X \in \mathfrak{X}(S^{2k})$ tiene (al menos) un cero.

+ el grado de un aplicación $N \xrightarrow{f} M$ con $\dim(N) = \dim(M)$ es
$\deg(f) := \mathrm{int}(f, m_0) = \mathrm{im}(f) \bullet \{m_0\}$ donde $m_0 \in M$ (supongo M conexo).





y muchos más (numero de rotación de una curva, números de enlace, ... etc.).
Curiosamente, uno puede mostrar el teorema fundamental de algebra usando que cada polynomio $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ es homotopíca a z^n (con grado n).
Ver p.ej. Milnor: Topology from a differentiable viewpoint ó el libro Topología Diferencial de Gitler y Antoniano (en página web) para más detalles.

Tales nociones relacionan con las formas diferenciales bajo la cohomología de deRham.

Por ejemplo, el grado de $f: N \to M$ satisface

$$\deg f \cdot \int_M \omega = \int_N f^*\omega \qquad \text{cada } \omega \in \Omega^{\dim(M)}(M).$$

Un poco más fina, numerós de intersección se puede determinar en sabiendo un base de k-formas cerradas para $H^k(M;\mathbb{Z})$

[e.g. $d\theta_1, d\theta_2$ en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$].

Entonces cada $[N] \in H_k(M;\mathbb{Z})$ corresponde a una $[\omega] \in H^{n-k}(M;\mathbb{Z})$
y para $[\tilde{N}] \in H_{n-k}(M;\mathbb{Z})$ con $[\tilde{\omega}] \in H^k(M;\mathbb{Z})$ tenemos:

$$\mathrm{int}(N,\tilde{N}) = \int_M \omega \wedge \tilde{\omega}.$$

Referencias:

- do Carmo ch. 0, 1
- O'Neill: Semi-Riemannian Geometry ch. 1, 2
- Sharpe: ch. 1
- Hsiang: Lectures on Lie Groups
- Rees: Notes on Geometry
- Guillemin and Pollack: Differential Topology.