

VARIETADES

①

UN VARIETADE (DIFERENCIABLE) DE DIMENSION n ES UN ESPACIO TOPOLOGICO, M^n , LOCALMENTE PARAMETRIZADO POR n -VARIABLES:

- (i) M ES HAUSDORFF Y SEGUNDA CONTABLE ($\exists$ base contable)
- (ii) M TIENE UN ATLAS (diferenciable).

* UN ATLAS ENTENDEMOS COMO UN COLECCION DE CARTAS:

$$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \subset M, \text{ homeomorfismos,}$$

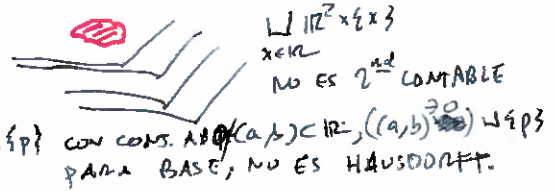
que son COMPATIBLES:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & M & \psi \\ \swarrow & & \searrow \\ U \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & V \subset \mathbb{R}^m \\ & \text{diff.} & \end{array}$$

, las aplicaciones de transición siendo diferenciable.

y además que cubren M : $\forall p \in M \exists$ carta $U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \ni p$.

* LAS CONDICIONES (i) SON PARA EVITAR, POR EJEMPLO, LLAMANDO $\mathbb{R}^3$ UNA VARIETADE DE DIMENSION 2 (equipunto $\mathbb{R}^3$ con LA TOPOLOGIA INDUCIDA POR $\mathbb{R}^3 \cong \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \times \{x\}$): TAMBIEN QUERIAMOS PODER SEPAR PUNTOS POR BARRIOS, que excluye ciertas espaciales quocientes?



* CADA ATLAS DETERMINA UNA ESTRUCTURA DIFERENCIABLE SOBRE M , QUE ES:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) = \{ \text{todas las cartas que son compatibles con cartas de la atlas } A \}.$$

EL PUNTO DE DEFINIR $\mathcal{D}$ ES PARA PERMITIR FLEXIBILIDAD PARA HACER CAMBIOS DE COORDENADAS ARBITRARIAS ALREDEDOR UN PUNTO Y NO SOLO TRABAJAR CON LAS CARTAS EN A : $U \subset M \in A \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{D}$ CUALQUIER CAMBIO DE COORDS (DIFFER.) $f: U \rightarrow V$.

DOS ATLASES PUEDEN GENERAR LA MISMA $\mathcal{D}$ (SI LAS CARTAS DE LOS DOS SON COMP.), QUE INDUCE UN RELACION DE EQUIVALENCIA SOBRE ATLASES DE M . EL ESTRUCTURA DIFF GENERADO POR UN ATLAS A , ES EL ATLAS MAXIMAL EN ESTE CLASE DE EQUIV. DE A BASU EL ORDEN $A \in \hat{A}$ SI CADA CARTA DE A ES UN CARTA DE $\hat{A}$.

* DE MISMA MANERA PODEMOS DEFINIR ESTRUCTURAS C^k , ANALITICAS, COMPLETAS, AFINAS, ... SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO POR REQUIRIENDO TALES CONDICIONES SOBRE SUS APLICACIONES DE TRANSICION EN UN ATLAS A SER COMPATIBLES.

EJEMPLOS

- 1) UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSION n , V , TIENE ESTR. DIFF INDUCIDA POR EL ESLOGE de UN BASE: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ UN BASE DETERMINE LA CARTA GLOBAL $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x^i \vec{v}_i \in V$.

2) ESFERAS, $S_r^n = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. SE PUEDE CONSTRUIR (2) UN ATLAS POR EJEMPLO USANDO DOS PROYECCIONES ESTEREOGRÁFICAS, OTRA ATLAS (QUE GENERA LA MISMA ESTR. DIFF.) SE PUEDE CONSTRUIR CON CARTAS DE PROYECCIÓN ORTOGONAL, P.EJ. $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \{x^{n+1} = \sqrt{r^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}\} = S_r^2 \cap \{x^{n+1} > 0\}$.

3) ESPACIOS PROYECTIVOS (REALES), $\mathbb{P}V$, SON EL ESPACIO DE LINEAS POR EL ORIGEN EN UN ESPACIO VECTORIAL (REAL), V de dimensión FINITA. SU TOPOLOGÍA ES LA TOPOLOGÍA QUOTIENTE INDUCIDA POR $V \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}V$ QUE ENVIA $v \in V \setminus \{0\}$ A LA LINEA ESPANEADO, $\text{span}(v)$, POR v , Y DONDE V TIENE SU TOPOLOGÍA ESTÁNDAR (INDUCIDA POR UN CARTA DE EJ. (1)).

SE PUEDE CONSTRUIR UN ATLAS USANDO CARTAS AFINAS:

EN UN BASE $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ DE V , ENVIAMOS $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \pi(\vec{v}_0 + x^i \vec{v}_i) \in \mathbb{P}V$.

CUANDO $\dim(V) = n+1$, ESCRIBIMOS $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ PARA ESTE VARIEDAD DE DIM. n .

SIMILARMENTE LAS GRASSMANIANAS, $Gr_k(V)$ SON $0 \leq k \leq \dim(V)$, SON EL ESPACIO DE SUBESPACIOS DE V de dimensión k .

SON VARIEDADES DE DIMENSIÓN $k(\dim(V) - k)$.

| APLICACIONES |

UN APLICACIÓN $f: M \rightarrow N$ ENTRE VARIEDADES ES DIFERENCIABLE POR PEM, SI POR CARTAS $U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, $V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ LA APLICACIÓN

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ESTA DIFERENCIABLE POR $\varphi^{-1}(p) \in U$.

CUANDO f ESTA DIFERENCIABLE POR CADA PEM, DECIMOS QUE f ES DIFERENCIABLE.

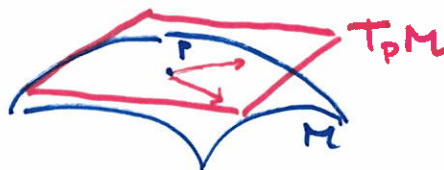
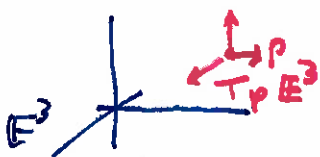
DENOTAMOS $C^\infty(M, N) = \mathcal{F}(M, N)$ PARA FUNCIONES DIFERENCIABLES DE M A N .

* APLICACIONES DIFERENCIABLES $(a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ SON CURVAS EN M (parametri).

* EL ANILLO DE FUNCIONES DIFF. $M \rightarrow \mathbb{R}$, DENOTAMOS $C^\infty(M) = \mathcal{F}(M)$.

| ESPACIO TANGENTE |

DEFINIMOS EN TRES MANERAS (EQUIVALENTES) LA ESPACIO TANGENTE (UN ESPACIO VECTORIAL) POR UN PUNTO DE UNA VARIEDAD.



1) COMO VELOCIDADES DE CURVAS;

(3)

• UNA CURVA $(-e, e) \xrightarrow{c} M$ PASANDO POR $p = c(0) \in M$

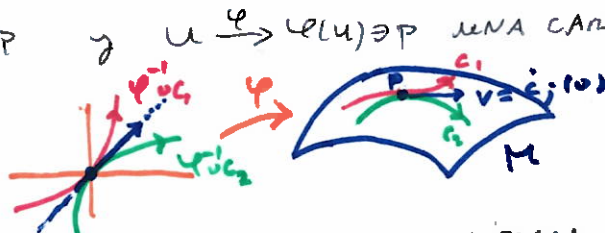
DETERMINA UNA "VELOCIDAD TANGENTE A M EN P".

• DOS CURVAS GENERAN LAS MISMAS VEL. TANGENTES SI MEDIMOS LAS MISMAS VELOCIDADES EN ALGÚN CARTA;

$(-e, e) \xrightarrow{\varphi} M$, $(-e, e) \xrightarrow{\psi} M$ $c_j(0) = p$ y $u \xrightarrow{\varphi} \varphi(u) \in p$ UNA CARTA

DETERMINAN EL MISMO VECT. TANG. SI:

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi^{-1}(c_1(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi^{-1}(c_2(t))$$



• DEFINIMOS EL ESPACIO TANGENTE DE M POR P, COMO CLASES DE EQUIVALENCIA DE CURVAS:

$$T_p M := \{ \text{CURVAS DIFF. EN M POR P} \} / \{ c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi^{-1}(c_1(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi^{-1}(c_2(t)) \}$$

ALGÚN CARTA φ ALREDEDOR DE P

DENOTAMOS $\dot{c}(0) \equiv [c(t)]$ PARA LA CLASE DE EQUIVALENCIA DE UNA TAL CURVA ($c(0) = p$) EN $T_p M$.

* $T_p M$ ES UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN $\dim(M)$. POR EJEMPLO PARA DEFINIR MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES $\alpha \in \mathbb{R}$ TOMAMOS

$\alpha \cdot [c(t)] := [c(\alpha t)]$. UN BASE SE OBTIENE POR UNA CARTA USANDO EL BASE ESTÁNDAR DE $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots)$ y $[c_i(t)] = [\varphi^{-1}(\varphi(p) + t e_i)]$.

CADA VECTOR TANGENTE $[c(t)]$ TIENE UN REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POR UN VECTOR EN $\mathbb{R}^n$ DADO POR $\frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi^{-1}(c(t)) \in \mathbb{R}^n$. *

2) COMO DERIVACIONES:

• UN VECTOR $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (BASADO POR $p \in \mathbb{R}^n$) ESTA DETERMINADO POR COMO ACTUA SOBRE FUNCIONES $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ BAJO DERIVADAS DIRECCIONALES:

$$f \mapsto d_p f(\vec{v}) := \frac{d}{dt} \Big|_0 f(c(t)) = (v f)_p \quad (\text{DONDE } c(0) = p, \dot{c}(0) = \vec{v})$$

POR EJEMPLO, SI x^i SON COORDENADAS ASOCIADO A UN BASE $\{e_i\}$ DE $\mathbb{R}^n$, TENEMOS

$$d_p x^i(\vec{v}) = (v x^i)_p = v^i \quad \text{DONDE } \vec{v} = v^j e_j \text{ EN ESTE BASE.}$$

• SEA $\mathcal{F}_p(M) := \{ \text{APLICACIONES } M \rightarrow \mathbb{R} \text{ DIFFERENCIABLES POR } p \in M \}$

DOS TALES APLICACIONES TIENEN LAS MISMAS "DERIVADAS DIRECCIONALES POR $\vec{v}$ " SI ESTAN DE ACUERDO EN ALGÚN BARRIO DE P. PONEMOS $\mathcal{F}_p^0(M) := \{ \text{APLICACIONES } M \rightarrow \mathbb{R} \text{ DIFF. POR } p \}$

tal q. $f|_U \equiv 0$ ALGÚN BARRIO U DE P

y $\mathcal{Q}_p(M) := \mathcal{F}_p(M) / \mathcal{F}_p^0(M)$ PARA LOS GÉRMINES DE FUNCIONES ALREDEDOR DE P

EL QUOCIENTE ENTENDEMOS USANDO EL ESTRUCTURA LINEAL SOBRE EL ALGEBRA DE

APLICACIONES $\mathcal{F}_p(M) \supset \mathcal{F}_p^0(M)$, ES DECIR $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_p(M)$ SON EQUIVALENTE, $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow$

$f_1 - f_2 \equiv 0$ ALGÚN BARRIO ~~U~~ UCM DE P.

• EL ESPACIO TANGENTE DE M POR p ES EL CONJUNTO DE DERIVACIONES (4)

$$T_p M := \text{Der}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R}) = \{v: \mathcal{O}_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } v(f_1 + f_2) = v(f_1) + v(f_2), v(f_1 f_2) = f_1(p)v(f_2) + f_2(p)v(f_1)\}$$

* ESTE DEFINICIÓN DE $T_p M$ ES NATURALMENTE UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN $\dim(M)$. SU ESTRUCTURA VECTORIAL ES DEFINIDO POR $(\alpha v_1 + v_2)(f) := \alpha(v_1, f) + v_2(f)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). UN BASE SE PUEDE OBTENER EN COORDENADAS, φ , CENTRADO POR p (CON $\varphi(0, \dots, 0) = p$):

$$+ \forall f \in \mathcal{F}_p(M), f(q) = f(p) + x^i(q) g_i(q) \text{ CON } g_i(p) = \partial_{x^i} f(p)$$

$$(\text{CONSIDERA } \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt)$$

ENTONCES $v f = (v x^i) \partial_i f(p) =: v^i \partial_i f(p)$, $v^i \in \mathbb{R}$ Y LAS DERIVACIONES POR PARCIALES RESPECTO A COORDENADAS SON UN BASE. *

3) POR REGLAS DE TRANSFORMACIÓN BATO APLICACIONES DE TRANSICIÓN:

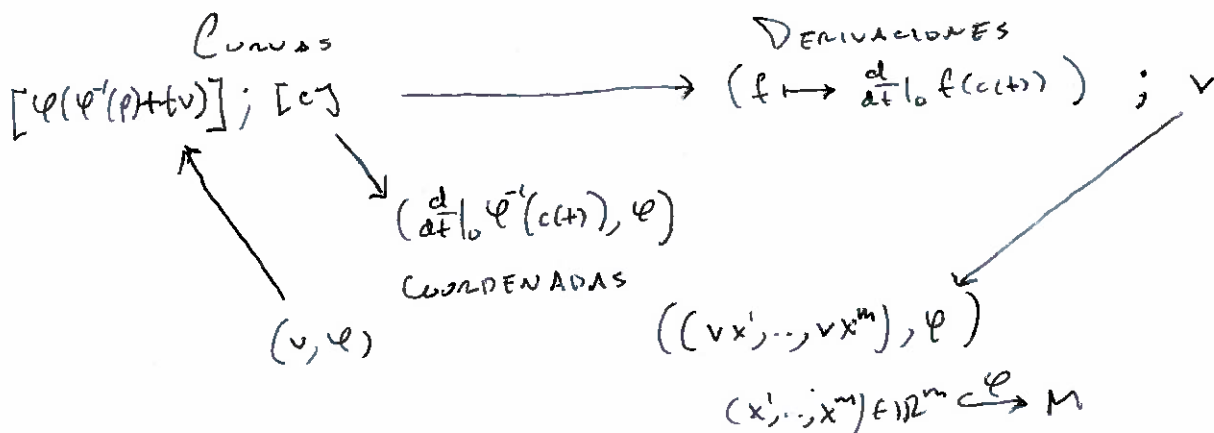
UN VECTOR TANGENTE A M POR p SERÁ UN VECTOR FAMILIAR DE $\mathbb{R}^m$ ASOCIADO A CADA CARTA ALREDEDOR p .

ESO ES PARES: (v, φ) CON $v \in \mathbb{R}^m$, $\varphi: U \rightarrow M$ UNA CARTA.

TAL ASOCIACIÓN ESTA REQUIRIDA SER "CONSISTENTE" O LA REGLA DE TRANSFORMACIÓN COINVARIANTE: $(v, \varphi) \rightsquigarrow (\tilde{v}, \tilde{\varphi})$ PARES PRESENTANDO EL MISMO VECTOR TANGENTE TIENEN: $\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} v^k$, DONDE $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \tilde{x}(x) \in \mathbb{R}^m$ ES LA TRANSFORMACIÓN DE TRANSICIÓN

* NOTAR QUE DADO UN PAR (v, φ) , SE EXTIENDE ÚNICAMENTE A UN VECTOR TANGENTE EN DEFINIENDO $(\tilde{v}, \tilde{\varphi})$ A TRAVÉS DE LA REGLA DE TRANSFORMACIÓN. *

LA EQUIVALENCIA DE LAS TRES IDENTIDADES/PERSONALIDADES DE VECTORES TANGENTES SIGUE DE VERIFICANDO LAS SIGUIENTES IDENTIFICACIONES SON ISOMORFISMOS LINEALES:



DIFERENCIALES

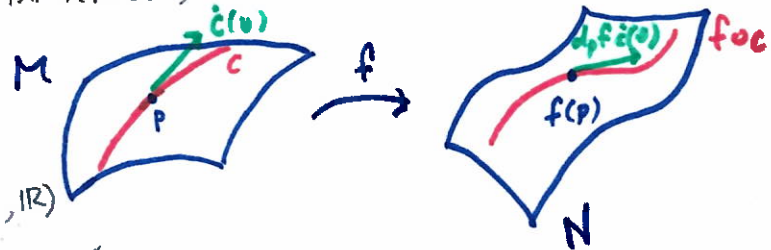
(5)

UN APLICACIÓN DIFERENCIABLE por $p \in M$, $f: M \rightarrow N$, INDUCE UNA LINEALIZACIÓN, $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, QUE ES UNA APLICACIÓN LINEAL ENTRE LOS ESPACIOS TANGENTES.

LLAMAMOS $d_p f$ LA DIFERENCIAL DE f POR p .

EN LAS TRES PRESENTACIONES DE VECTORES TANGENTES, LA DIFERENCIAL ESTÁ DEFINIDO POR:

1) $[c] \in T_p M \xrightarrow{d_p f} [f \circ c] \in T_{f(p)} N$



2) $v \in \text{Der}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R}) = T_p M \xrightarrow{f_*} f_* v \in \text{Der}(\mathcal{O}_{f(p)}, \mathbb{R})$

DONDE PARA $g \in \mathcal{T}_{f(p)}(N)$, $f_* v(g) := v(f^* g) = v(g \circ f)$.

3) CONSIDERA UN VECTOR EN COORDENADAS PRESENTADO POR EL PAR $(\vec{v}, \varphi) \in T_p M$.
SEA ψ UNA CARTA DE N ALREDEDOR DE $f(p)$.

ENTONCES EL VECTOR TANGENTE A N POR $f(p)$, $d_p f(\vec{v})$, ESTARÁ REPRESENTADO POR EL PAR $(d_{\bar{p}} \bar{f}(\vec{v}), \psi)$,

DONDE $\varphi(\bar{p}) = p$ y $d_{\bar{p}} \bar{f}$ ES EL JACOBIANO ESTANDARD PARA APLICACIONES $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

EXPLICITAMENTE, LAS COMPONENTES DE $\vec{w} = d_{\bar{p}} \bar{f}(\vec{v})$ SON $w^k = \frac{\partial \bar{f}^k}{\partial x^j} \Big|_{\bar{p}} v^j$, EN ESCRIBIENDO

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^n, x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto (\bar{f}^1(x), \dots, \bar{f}^n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

* LAS TEOREMAS SOBRE FORMAS NORMALES DE APLICACIONES EXTENDEN A VARIEDADES.
POR EJEMPLO, UNA $f \in \mathcal{F}(M, N)$ QUE ES UNA IMERSIÓN POR $p \in M$ ($\text{rango } d_p f = \dim(M) \leq \dim(N)$)
ENTONCES EXISTE COORDENADAS LOCALES ALREDEDOR $p, f(p)$ t.q.:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^m) & \mapsto & (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \end{array}$$

MENTIONAMOS UN OTRO VARIANTE MÁS FUERTE QUE ES UNA FORMA NORMAL ~~LOCAL~~ PARA APLICACIONES DE RANGO CONSTANTE:

SI EXISTE UN BARRIO DE $p \in M$ t.q.
 $\text{rango } d_q f = k \leq \dim M, \dim N$ ES CONSTANTE CADA q EN EL BARRIO
ENTONCES EXISTEN CARTAS ALREDEDOR $p, f(p)$ t.q.:

$$\bar{f}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

SUBVARIEDADES

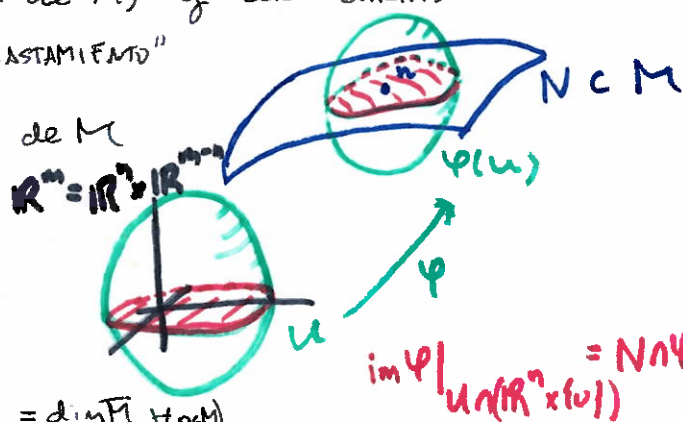
UN SUBCONJUNTO $N \subset M$ ES UNA SUBVARIEDAD (ENCLATADO) DE DIMENSIÓN $n \leq \dim(M) = m$ DE M SI:

⑥

N tiene la estructura de una variedad de dimensión n con la topología subespacio (inducida por la topología de M) y con cartas de un atlas consistiendo de cartas de "aplastamiento"

de M : $\forall u \in N, \exists \text{ carta } \varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(U) \subset M$

$$\text{t.q. } \varphi((x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \cap U) = N \cap \varphi(U)$$



$$\text{im } \varphi|_{U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})} = N \cap \varphi(U)$$

EJEMPLO: UN CONJUNTO NIVEL REGULAR de

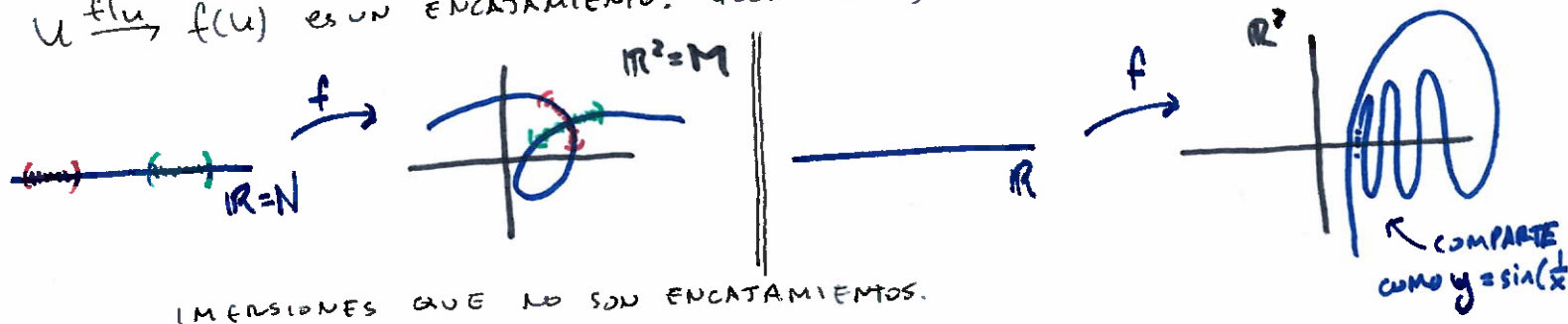
UNA SUBMERSIÓN ($f: M \rightarrow \tilde{M}$ con rango $\text{d}f = \text{dim } F_i \forall p \in M$)

ES UNA SUBVARIEDAD DE M CON DIMENSIÓN $\text{dim}(M) - \text{dim}(F_i)$, que sigue de la forma local normal para submersiones.

Por un ENCATAMIENTO DE UNA VARIEDAD N dentro de M , significamos una aplicación diferenciable $N \xrightarrow{f} M$, t.q. $\text{im}(f) \subset M$ es una subvariedad de dimensión $\text{dim}(N)$, y además $N \xrightarrow{f} \text{im}(f)$ es un difeomorfismo (es decir invertible, y diferenciable con respecto a las estructuras diferenciables de $N, \text{im}(f)$ con inverso también diferenciable).

Por un IMERSIÓN DE N dentro de M , significamos una aplicación DIFF. $N \xrightarrow{f} M$, t.q. $\text{d}_n f$ es inyectiva cada $n \in N$. Digamos $\text{im}(f)$ es una subvariedad de M imersionada.

CADA IMERSIÓN ES LOCALMENTE UN ENCATAMIENTO (FORMAS LOCALES NORMALES DE IMERSIONES), con que significamos $\forall n \in N, \exists$ BARRIO $U \subset N$ t.q. $U \xrightarrow{f|_U} f(U)$ es un ENCATAMIENTO. GLOBALMENTE, NO ES NECESARIAMENTE CIERTO:



IMERSIONES QUE NO SON ENCATAMIENTOS.

* UN CRITERIO ÚTIL ES: UN IMERSIÓN QUE ES UN HOMEOMORFISMO A SU IMAGEN ES UN ENCATAMIENTO. *

* MENCIONAMOS QUE SIMILARMENTE A LA DEFINICIÓN DE UNA VARIEDAD, PODEMOS DEFINIR UN VARIEDAD CON FRONTERA:

+ LAS CARTAS TIENEN DOMINIOS DE DEFINICIÓN: $U \cap \mathbb{R}_+^m$ DONDE $\mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m : x^m \geq 0\}$ y U es algún conjunto ABIERTO EN $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}_+^m$.

+ DOS TALES CARTAS SERÁN LLAMADO COMPATIBLES CUANDO LAS APLICACIONES DE TRANSICIÓN CORRESPONDIENTES

$W \subset \mathbb{R}_+^m \xrightarrow{f} \tilde{W} \subset \mathbb{R}_+^m$ SON DIFERENCIABLES,

ES DECIR, EXISTE $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}_+^m$ y UNA APLICACIÓN

DIFERENCIABLE $g: U \rightarrow \tilde{U}$ t.q. $W = U \cap \mathbb{R}_+^m, \tilde{W} = \tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^m$ y $g|_W = f$.

+ LOS PUNTOS $p \in M$ PARA QUE $\varphi^{-1}(p) \in \partial \mathbb{R}_+^m = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, 0)\}$ SON LLAMADOS PUNTOS EN LA FRONTERA de M , y la colección de TODOS TAL PUNTOS LA FRONTERA de M , DENOTADO POR ∂M .

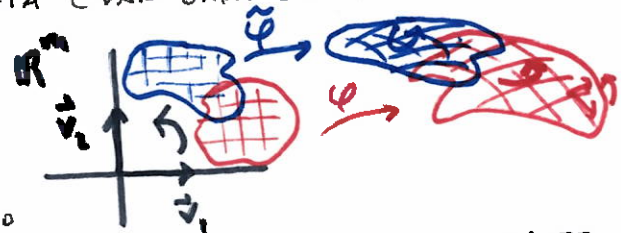


* CUANDO $M \subset N$ es una SUBVARIEDAD con FRONTERA de N , IGUAL ES SU FRONTERA $\partial M \subset M \subset N$ UNA SUBVARIEDAD DE N con dimensión $\dim(M) - 1$.

* CIENTOS VARIEDADES ADMETEN ORIENTACIONES, QUE ENTENDEMOS COMO UNA CONDICIÓN ADICIONAL SOBRE LAS CARTAS EN SU ATLAS:

- UN ORIENTACIÓN DE $\mathbb{R}^m$ CONSISTE EN UNA BASE ORDENADA $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^m$. DOS TAL BASES ORDENADAS TIENEN LA MISMA ORIENTACIÓN SI LA TRANSFORMACIÓN LINEAL ENVIANDO $\vec{v}_j$ A $\vec{w}_j$ TIENE DETERMINANTE POSITIVA.

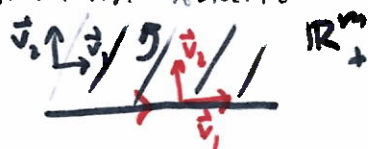
- SE PUEDE TRANSFERIR UNA ORIENTACIÓN de $\mathbb{R}^m$ A UNA ORIENTACIÓN SOBRE EL IMAGEN $\varphi(U) \subset M$ de UNA CARTA (DAR CADA ESPACIO TANGENTE LA ORIENTACIÓN REPRESENTADO POR $d\varphi(\vec{v}_1), \dots, d\varphi(\vec{v}_m)$)



- LAS ORIENTACIONES INDUCIDAS SOBRE $\varphi(U), \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ (POR UN ORIENT. FIJADO DE $\mathbb{R}^m$) COINCIDEN SOBRE SU TRASLAP $(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ SOLO CUANDO LAS JACOBIANOS DE SUS APLICACIONES DE TRANSICIÓN TIENE DETERMINANTE POSITIVA.

ENTONCES UN ORIENTACIÓN CONSISTE DE UN ATLAS PARA M t.q. TODOS LAS APLICACIONES DE TRANSICIÓN EN EL ATLAS TIENEN: $\det(d\varphi^{-1}(\tilde{\varphi})) > 0$.

* SI UN VARIEDAD con FRONTERA ADMITE UN ORIENTACIÓN, SE INDUCE UN ORIENTACIÓN SOBRE SU FRONTERA *



LAS OPERACIONES DE PRODUCTO Y CUOCIENTE SON ÚTILES PARA CONSTRUIR NUEVOS ESPACIOS TOPOLOGICALES desde conocidos.

DEJAMOS CONSTRUCCIÓN DE UN ATLAS PARA UN PRODUCTO DE VARIEDADES A LOS EJERCICIOS, y ahora CONSIDERAMOS UN POCO CUANDO PODEMOS CONSIDERAR ESPACIOS CUOCIENTES COMO VARIEDADES.

8

(*) para cada $x \in M$ existe un subvariedad $U \ni x$ de M con dimensión $k = m - n$, t.q.

$U[x] = \text{"órbita" o "hoja" o clase de eq. de } x.$

• [y] • • • •
• • • • •
[x]

UN RELACIÓN DE EQUIVALENCIA SOBRE $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ PARA QUE
EL QUOCIENTE NO ES HAUSDORFF:
 $(x, y) \sim (\tilde{x}, y) \quad y \neq 0 \quad \& \quad (x^2, 0) \sim (\tilde{x}^2, 0) \quad \& \quad (-x^2, 0) \sim (\tilde{x}^2, 0)$

UN PARTICIÓN DE M EN SUBVARIETADES DE DIMENSION CONSTANTE ES UN CASO DE UN FOLIACIÓN DE M (MÁS GENERALMENTE UNA CONSIDERE FOLIACIONES POR SUBV. IMERSIÓN). EN ESTE CASO LLAMAS LAS CLASES DE EQUIVALENCIA LAS HOJAS DE LA FOLIACIÓN, Y EL ESPACIO CUOCIENTE EL ESPACIO DE HOJAS.

EL ESPACIO CUOCIENTE EL ESPACIO DE HOJAS.

* UN APLICACIÓN $M \xrightarrow{f} N$ QUE ES UNA SUBMERSIÓN ($\text{rang} df_x = \dim N \forall x \in M$) CONDUCE A UN FOLIACIÓN POR CONTUNTOS NIVELES DE f ($x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$). EN ESTE CASO N ESTÁ EL ESPACIO CUOCIENTE $M/\sim$. EN CAMBIO, UN FOLIACIÓN PARA QUE $M/\sim$ ES UNA VARIEDAD DETERMINA LA SUBMERSIÓN $M \xrightarrow{\pi} M/\sim$.



$\pi: M \rightarrow M/\sim$

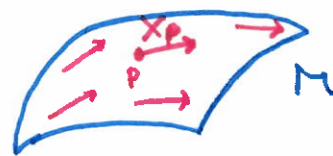
FOCALIZACIÓN DEL PLANO, CONVERGENTE

CAMPOS VECTORIALES

(4)

UN CAMPO VECTORIAL, X , SOBRE M ES UNA ASIGNACIÓN DE UN VECTOR TANGENTE A M POR p POR CADA $p \in M$:

$$M \ni p \mapsto X(p) = X_p \in T_p M \subset TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$



CONSIDERAMOS TALES CAMPOS QUE SON DIFERENCIABLES, SIGNIFICANDO QUE EN COORDENADAS, $u \xrightarrow{\varphi} M$, INDUCIENDO LAS BASES $\partial_j|_p$ DE $T_p M$ LA APLICACIÓN

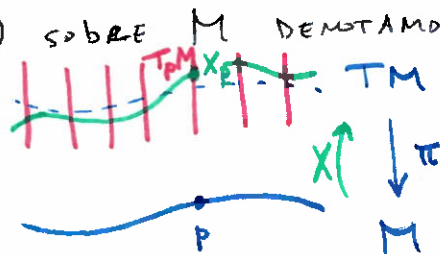
$$\mathbb{R}^m \ni u \mapsto \mathbb{R}^m, u \mapsto (X^1(\varphi(u)), \dots, X^m(\varphi(u))) \quad [\text{con } X_p = X^j(p) \partial_j|_p]$$

es diferenciable.

* EL CONJUNTO DE TODOS ESPACIOS TANGENTES DE M , $\bigcup_{p \in M} T_p M =: TM$, ES EL HAZ TANGENTE DE M . TIENE LA ESTRUCTURA DE UNA VARIEDAD CON CARTAS INDUCIDAS POR LAS CARTAS DE M : $u \xrightarrow{\varphi} M$ INDUCE $\pi \times \mathbb{R}^m \ni u \times v \xrightarrow{\hat{\varphi}} \bigcup_{p \in \varphi(u)} T_p M$ ENVIANDO

$(u, v^1, \dots, v^m) \mapsto v^j \partial_j|_{\varphi(u)} \in T_{\varphi(u)} M$. LA PROYECCIÓN $TM \xrightarrow{\pi} M$ ENVIANDO $v \in T_p M \mapsto p$ ES UNA SUBMERSIÓN, Y CAMPOS VECTORIALES (diff.) SON SECCIONES (diff.) DE ESTE PROYECCIÓN: $M \xrightarrow{X} TM$ t.q. $\pi \circ X = id_M$. *

EL CONJUNTO DE CAMPOS VECTORIALES (diff.) SOBRE M DENOTAMOS POR $\mathcal{X}(M) \subset T(TM)$.



CAMPOS VECTORIALES DEFINEN EDO'S DE

PRIMER ORDEN SOBRE M : UNA CURVA (PARAM.), $c: \mathbb{R} \rightarrow M$, EN M TIENE PARA CADA $c(t)$ SU VELOCIDAD $\dot{c}(t) \in T_{c(t)} M$. LAS CURVAS INTEGRALES DE $X \in \mathcal{X}(M)$

SON LAS PARA QUE $\dot{c}(t) = X(c(t))$ CADA t .

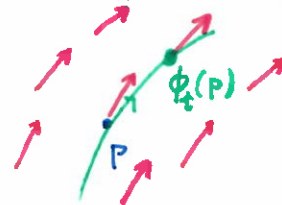
EN COORDENADAS LOCALES, LAS CURVAS INTEGRALES SON SOLUCIONES DE LA EDO: $\dot{c}^i(t) = X^j(\varphi(c(t))) \partial_j^i$, DONDE $X = X^j \partial_j$ EN ESTAS COORDS.

* LA TEOREMA de existencia y unicidad PARA EDO'S EN $\mathbb{R}^m$ ahora implica que para $X \in \mathcal{X}(M)$ y $p \in M$, $\exists!$ CURVA INTEGRAL, $c(t)$, de X con $c(0) = p$, definido por algún intervalo del tiempo $t \in (-t_m, t_m) \subset \mathbb{R}$ maximal. *

CUANDO LAS CURVAS INTEGRALES de X son definidos por todos tiempos, llamamos X COMPLETO. POR EJEMPLO, SI M es compacto, CADA $X \in \mathcal{X}(M)$ es completo.

EJEMPLOS: $\dot{x} = x^2$ SOBRE $\mathbb{R}$ NO ES COMPLETO; $\dot{x} = -\frac{1}{2x}$ SOBRE $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ NO ES COMPLETO.

Dado un campo vectorial completo, su transformación en tiempo t sea $\phi_t: M \rightarrow M$ que envía p a $\phi_t(p)$ donde ϕ_t es la curva integral de X con condición inicial p . Llamamos $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ o (ϕ_t) al FLUJO de X .



* $\forall p \in M$ la curva $t \mapsto \phi_t(p)$ es una curva integral

* por existencia y unicidad de curvas integrales, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

En particular cada ϕ_t es invertible (ya que $\phi_0 = \text{id}$).

* Por el teorema en $\mathbb{R}^n$ de dependencia diferenciable por condiciones iniciales, cada ϕ_t es diferenciable. Entonces $t \mapsto \phi_t \in \text{Diff}(M)$ es un homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y difeomorfismos de M . También el flujo es llamado un grupo de difeomorfismos de un parámetro.

Dado un flujo, se recupera el campo vectorial por $X(p) = [\phi_t(p)] = \frac{d}{dt} \big|_0 \phi_t(p)$.

DERIVADA o CORCHETES DE LIE:

Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Queríamos medir como "Y cambia bajo el flujo de X".

A hacer este "retrocedamos" Y a lo largo curvas integrales de X: Para $p \in M$ y ϕ_t el flujo de X, notan que

$d_{\phi_t(p)} \phi_{-t}: T_{\phi_t(p)} M \xrightarrow{\phi_{-t}*} T_p M$, en particular $d_{\phi_t(p)} \phi_{-t}(Y(\phi_t(p)))$

es una curva de vectores en $T_p M$, un espacio vectorial FIJADO.

Definimos $\mathcal{L}_X Y(p) := \frac{d}{dt} \big|_0 d_{\phi_t(p)} \phi_{-t}(Y(\phi_t(p))) \in T_p M$, y debido a que funciona para cada $p \in M$ hemos obtenido un campo vectorial $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, llamado la DERIVADA DE LIE de Y por X.

Por sucintitud, escribimos $\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \phi_{-t} * Y$.

* Sea ψ_s el flujo de Y. Ya que $Y(\phi_t(p)) = [\psi_s \circ \phi_t(p)]$ obtenemos:

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d^2}{dt ds} \big|_{t=s=0} \phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t$$



LA DERIVADA DE LIE ES CERO ENTONCES CUANDO LOS FLUJOS CONUTAN: $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$

* LA DERIVADA DE LIE COMPORTE BIEN CON CAMBIOS DE VARIABLES. Si

$f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, tenemos: $f_* \mathcal{L}_X Y = \mathcal{L}_{f_* X} f_* Y$.

(el flujo de $f_* X$ p.ej. es $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$)

* CAMPOS VECTORIALES TIENEN ÚTIL INTERPRETACIÓN "algebraica" ó como OPERADORES. Ya que un vector tangente aplicado a un FUNCIÓN RETORNE UN NÚMERO, UN CAMPO VECTORIAL (diff.) se aplica punto por punto a un FUNCIÓN PARA OBTENER OTRA FUNCIÓN:

$X \in \mathcal{X}(M)$ es una DERIVACIÓN DE FUNCIONES $\mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), f \mapsto X \cdot f$

donde $X \cdot f(p) := X_p \cdot f = df(X_p)$.

LA RELACIÓN CON EL FLUJO, φ_t , de X es (en breve) $X \cdot f = \frac{d}{dt} \big|_0 \varphi_t^* f$ con $\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$ ("retroso" de f por φ_t).

DEBIDO A QUE φ_t es un DIFFEOMORFISMO PODEMOS RETRASAR CAMPOS VECTORIALES:

$$\varphi_t^* Y(f) := Y(\varphi_{-t}^* f) = (\varphi_{-t}^* Y)(f).$$

CON ESTE NOTACIÓN, $\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt} \big|_0 \varphi_t^* Y$. AHORA JUGANDO CON LAS DEFINICIONES, TENEMOS $(\varphi_t^* Y)_p \cdot \varphi_t^* f = Y(\varphi_{-t}^* \varphi_t^* f) = \varphi_t^* (Yf)_p$, ENTONCES:

$$\varphi_t^* (Yf) = Yf = (\varphi_t^* Y) \cdot \varphi_t^* f - Y \cdot \varphi_t^* f + \underbrace{Y \cdot \varphi_t^* f - Y \cdot f}_{\text{y aplicando } \frac{d}{dt} \big|_0 \Rightarrow}$$

$$X \cdot Y \cdot f = \mathcal{L}_X Y \cdot f + Y \cdot X \cdot f, \text{ ó bien}$$

$$\mathcal{L}_X Y = XY - YX =: [X, Y]$$

QUE DENOTAMOS CON LAS CORCHETES DE LIE PARA ENFASIZAR LA ANTI-COMUTATIVIDAD.

* EN UNA SISTEMA DE COORDENADAS $U \xrightarrow{\varphi} M$ CON BASES $\partial_j|_p$ de $T_p M$

TENEMOS:

$$[X, Y] = (X^j \partial_j Y^k - Y^j \partial_j X^k) \partial_k$$

DONDE $X = X^j \partial_j$, $Y = Y^j \partial_j$ EN TAL COORDENADAS. *

* OTRA IDENTIDAD ÚTIL ES COMO $[X, Y]$ COMPORTE COMO DERIVACIÓN:

$$[X, f_1 Y_1 + f_2 Y_2] = [X, f_1 Y_1] + [X, f_2 Y_2] \text{ y } [X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y].$$

* CUANDO $f \in \mathcal{X}(M)$ TIENE UN PUNTO CRÍTICO POR PEM ($df \equiv 0$) SAL

HESSIANO $H_p f(u, v) := u \cdot v \cdot f$ [donde $u, v \in T_p M$ y $u, v \in \mathcal{X}(M)$ con $U_p = u, V_p = v$]

esta bien DEFINIDO y es UNA FORMA BILINEAL Y SIMÉTRICA SOBRE $T_p M$.