

GEOMETRÍA RIEMANNIANA

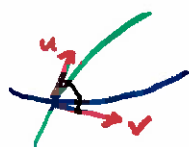
①

UNA VARIEDAD RIEMANNIANA, (M, g) , CONSISTE DE UNA VARIEDAD M CON UN TENSOR $g \in \text{Sym}^2(T^*M)$ TIPO $(0,2)$ SIMÉTRICA Y POSITIVA DEFINITA: $g(v,v) > 0$ CADA $v \neq 0$ [en decir cada $p \in M$,

$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es un PRODUCTO INTERIOR].

LLAMAMOS A g LA MÉTRICA RIEMANNIANA O SOLO LA MÉTRICA.

* EN TAL VARIEDAD, TENEMOS ÁNGULOS ENTRE CURVAS, Y LONGITUDES DE CURVAS:



$$\angle(u,v) := \arccos\left(\frac{g(u,v)}{|u||v|}\right) \in [0, \pi)$$

DONDE $|u|^2 := g(u,u)$.

$$l(c) := \int |\dot{c}(t)| dt.$$

* APLICACIONES QUE PRESERVAN ÁNGULOS — APLICACIONES CONFORMALES —

$(\tilde{M}, \tilde{g}) \xrightarrow{f} (M, g)$ SON LAS PARA QUE $f^*g = e^\varphi \tilde{g}$ ALGÚN

$\varphi: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$. LA ESTUDIA DE PROPIEDADES INVARIANTE BASO TALES APLICACIONES CONSTITUYE LA GEOMETRÍA CONFORMAL.

APLICACIONES QUE PRESERVAN DISTANCIAS — ISOMETRIAS — SON LAS PARA QUE

$f^*g = \tilde{g}$. EL ESTUDIO DE PROPIEDADES INVARIANTE BASO ISOMETRIAS CONSTITUYE LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA.

EN COORDENADAS LOCALES $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi} M$, TENEMOS;

$$g = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} := g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$$

Y LA MISMA CALCULACIÓN PARA SUPERFICIES MUESTRA QUE EXTREMALES LOCALES DE FUNCIONAL DE LONGITUD SON TAMBIÉN EXTREMALES (CONVEX. CONST.) DE LA FUNCIONAL DE ENERGÍA $[c \mapsto \int |\dot{c}|^2 dt]$ Y LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE TOMAN LA FORMA:

$$(*) \quad \ddot{x}^j + T_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l = 0, \quad \text{con } T_{kl}^j := \frac{1}{2} g^{jm} (g_{km,l} + g_{lm,k} - g_{lm,m})$$

LOS SÍMBOLES DE CRISTOFFEL. TALES EXTREMALES LLAMAMOS geodésicas de (M, g) .

(2)

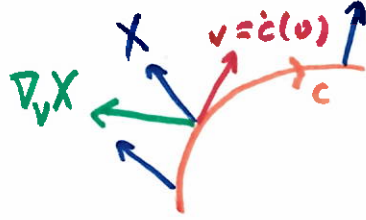
* EN PARTICULAR, DE (*), EXISTE UNA ÚNICA GEODÉSICA PASANDO POR UN PUNTO CON VELOCIDAD INICIAL. ESCRIBIMOS $\gamma_v(t)$ PARA LA GEODÉSICA CON CONDICIÓN INICIAL $v \in T_p M$, NOTAR QUE TENEMOS:
 $|\dot{\gamma}_v(t)| = |v| = \text{cst.}$

CONEXIONES

RECORDAMOS DE SUPERFICIES, NUESTRO CONCEPTO DE TRANSPORTE PARALELO ERA EQUIVALENTE A LA SIGUIENTE DERIVADA COVARIANTE, QUE PODEMOS VER COMO UNOS OPERADORES:

$$\nabla_v : \mathcal{X}(M)_p \rightarrow T_p M, \text{ cada } v \in T_p M$$

$$X \mapsto \nabla_v X := p_{*}^{TM} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 X(c(t)) \right)$$



TENEMOS $\nabla_v (X+Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y$

$$\nabla_{v+u} X = \nabla_v X + \nabla_u X$$

$$\nabla_v (fX) = (v \cdot f)X + f \nabla_v X$$

$$\forall u, v \in T_p M, c \in \mathbb{R}$$

$$X, Y \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{F}(M),$$

lo que determina ' ∇ ' COMPLETAMENTE DEBIDO A LA SIGUIENTE EXPRESIÓN EN COORDENADAS. PON $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$, ENTONCES

$$\nabla_{v^i \partial_{x^i}} X^k \partial_{x^k} = \left(v^i \partial_{x^i} X^k \Big|_p + v^l X^m(p) \Gamma_{lm}^k(p) \right) \partial_{x^k} \Big|_p.$$

EN GENERAL, UN CONEXION AFINA SOBRE UNA VARIEDAD M ES UN

OPERADOR:

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

tal que

$$(i) \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$(ii) \nabla_X (fY) = (X \cdot f)Y + f \nabla_X Y$$

$$(iii) \nabla_{X+fY} (Z) = \nabla_X Z + f \nabla_Y Z$$

* NOTAR QUE (iii) PERMITENOS DEFINIR $\nabla_V X \in T_p M$ PARA $V \in T_p M$ EN LA SIGUIENTE MANERA:

SEA $V \in \mathcal{X}(M)$ UN EXTENSIÓN DE $V_p \in T_p M$ ($V_p = v$) Y PONEMOS

$$\nabla_v X := \nabla_V X|_p, \text{ QUE ES BIEN DEFINIDO PORQUE}$$

SI $\tilde{V} \in \mathcal{X}(M)$ ES OTRA EXTENSIÓN DE v , ENTONCES POR (iii) Y EN COORDENADAS TENEMOS:

$$\nabla_{V-\tilde{V}} X|_p \stackrel{(iii)}{=} (v^i - \tilde{v}^i)|_p \nabla_{\partial_{x^i}} X|_p = 0$$

DEBIDO A $V_p = \tilde{V}_p = v$, ENTONCES, $\nabla_V X|_p = \nabla_{\tilde{V}} X|_p$.

* CADA CONEXIÓN AFINA ENTONCES DETERMINA UN CONCEPTO DE CAMPOS VECTORIALES PARALELOS A LO LARGO DE CURVAS Y GEODÉSICAS.

ASADEN, $X \in \mathcal{X}(M)$ ES PARALELO A LO LARGO LA CURVA c CUANDO:
 $\nabla_{\dot{c}} X = 0$. UNA CURVA c ES UN GEODÉSICA CUANDO SU ACCELERACIÓN ES CERO — SU VELOCIDAD ES PARALELO: $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$.

* EN PONIENDO $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^k} =: \Gamma_{ij}^i \partial_{x^i}$ PARA Γ_{ij}^i LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL DE LA CONEXIÓN, TENEMOS LAS SIGUIENTES EDO'S PARA CAMPOS PARALELOS A LO LARGO CURVAS Y GEODÉSICAS EN COORDENADAS:

$$\dot{x}^k + \dot{c}^i x^j \Gamma_{ij}^k = 0 \iff X \parallel c \quad (X \text{ PARALELO A LO LARGO } c)$$

$$\ddot{c}^k + \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \iff \nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0 \quad (c \text{ UNA GEODÉSICA})$$

EN PARTICULAR DADO $v_0 \in T_{c(0)} M \exists! v_t \in T_{c(t)} M$ t.q. $v_t \parallel c$

y $v_0 = v_t$ POR EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE EDO'S (TRANSP. PARA.).

* UN CONEXIÓN DETERMINA UNA DERIVACIÓN DE TENSORES, DADO $X \in \mathcal{X}(M)$

PON $\nabla_X f = X \cdot f \in \mathcal{F}(M)$ PARA $f \in \mathcal{F}(M)$ Y YA TENEMOS

$\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ PARA $Y \in \mathcal{X}(M)$ SE EXTIENDE A LA DERIVACIÓN POR:

$$\mathcal{T}_s^r(M) \xrightarrow{\nabla_X} \mathcal{T}_s^r(M)$$

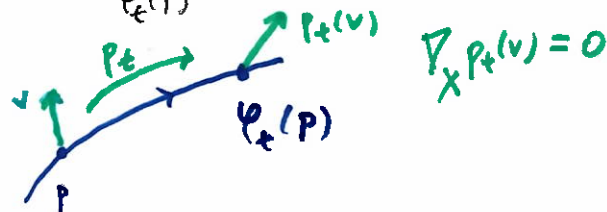
$$\begin{aligned} (\nabla_X \tau)(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s) &= X \cdot (\tau(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s)) - \sum_{j=1}^r \tau(w^1, \dots, \nabla_X w^j, w^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s \tau(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_s) \end{aligned}$$

Donde para $\omega \in \Omega^1(M)$, $\nabla_X \omega(Y) := X \cdot \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y) \in \Omega^1(M)$. (4)

Geométricamente, $\nabla_X \tau$ mide el 'cambio del tensor τ bajo transporte paralelo', a saber:

$$(\nabla_X \tau)_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) = \frac{d}{dt} \Big|_0 P_t^*(\tau_{\varphi_t(p)})(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s)$$

Donde φ_t es el flujo de X y $P_t: T_p M \rightarrow T_{\varphi_t(p)} M$ el transporte paralelo a lo largo de $\varphi_t(p)$, para $\alpha^i \in T_p^* M$, $v_i \in T_p M$.



VARIAS OPERADORES, SE PUEDE DEFINIR CON TAL DERIVACIÓN. PRIMERA OBSERVACIÓN

$$\nabla: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r(M),$$

$$(\nabla \tau)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_0, \dots, X_s) := (\nabla_{X_0} \tau)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

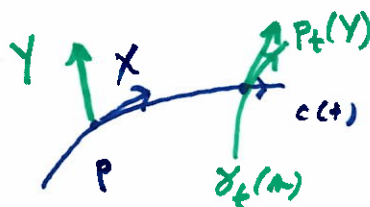
y por ejemplo el Hessiano de una función $f \in \mathcal{F}(M)$ podemos definir en cualquier punto (no solo los puntos críticos) por

$$\text{Hess}^\nabla f := \nabla(df) = \nabla(\nabla f) \in \mathcal{T}_2^0(M)$$

UNA FORMA BILINEAL EN LOS ESPACIOS TANGENTES de M .

Geométricamente, es dado por la misma construcción delineado en superficies, y tenemos la fórmula:

$$\text{Hess}^\nabla f(X, Y) \stackrel{(*)}{=} X(Yf) - \nabla_X Y \cdot f.$$



EN PARTICULAR, UNA CONEXIÓN ES LLAMADO SIMÉTRICA O LIBRE DE TORSIÓN CUANDO

$$(\text{Hess}^\nabla f)_p(X, Y) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_0 f(\varphi_t(p)).$$

el Hessiano de cualquier función sea UNA FORMA BILINEAL SIMÉTRICA:

$$\text{si } \text{Hess}^\nabla f(X, Y) = \text{Hess}^\nabla f(Y, X) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M), X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

De (*) TAL CONDICIÓN ES EQUIVALENTE A:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

EN TÉRMINOS DE COORDENADAS, LA CONDICIÓN LIBRE DE TORSIÓN TOMA LA FORMA: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ PARA LOS SÍMBOLES DE CRISTOFFEL DE LA CONEXIÓN. (5)

CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA

EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA HAY UNA CONEXIÓN AFINA 'COMPATIBLE CON LA MÉTRICA' ÚNICAMENTE DETERMINADA.

RECORDAMOS QUE PARA SUPERFICIES, TAL CONEXIÓN ESTÁ DETERMINANDO EN ESPECIFICANDO EL TRANSPORTE PARALELO A LO LARGO DE GEODÉSICAS:

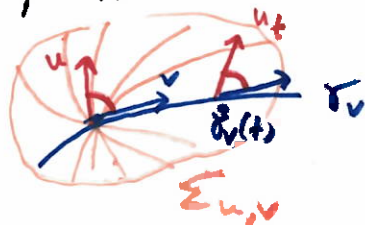
$$\nabla_{\dot{\gamma}}(P_{t,v}, \dot{\gamma}(t)) = \text{cst.}$$

SIGUE DE NUESTRO TRABAJO CON SUPERFICIES QUE TAL CONEXIÓN ES LIBRE DE TORSIÓN, ya que $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{li,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}) = \Gamma_{ji}^k$.

SE PUEDE EXTENDER TAL CONSTRUCCIÓN A GENERAL (M, g) POR

$\gamma_v(t)$ UNA GEODÉSICA $(\dot{\gamma}(0) = v)$ y $u \in T_{\gamma(0)} M$ SEA

$\Sigma_{u,v} \subset M$ EL SUPERFICIE FORMADO DE SEGMENTOS DE GEODÉSICAS CON CONDICIÓN INICIAL EN EL PLANO $\text{span}(u, v) \subset T_{\gamma(0)} M$. AHORA TOMES EL TRANSPORTE PARALELO DE u A LO LARGO DE γ_v EL TRANSPORTE PARALELO DE u A LO LARGO γ_v EN EL SUPERFICIE $\Sigma_{u,v}$ CON LA RESTRICCIÓN DE LA MÉTRICA g :



EVIDENTEMENTE, TAL TRANSPORTE PARALELO PRESERVA ÁNGULOS y ~~norma~~ normal de vectores tangentes y es libre de torsión. EN FORMA DIFERENCIAL:

$$(i) \nabla g = 0$$

$$(ii) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

UN CONEXIÓN AFINA SOBRE (M, g) QUE SATISFACE (i), (ii) LLAMAMOS COMPATIBLE CON g . DE HECHO (i), (ii) DETERMINA ∇ ÚNICAMENTE, y LLAMAMOS LA CONEXIÓN AFINA COMPATIBLE CON g LA ~~CONEXIÓN~~ CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA DE (M, g) .

EXPLICITAMENTE, LA CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA ESTÁ DADO POR LA FORMULA DE KOSZUL:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y)$$

⑥

$$+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

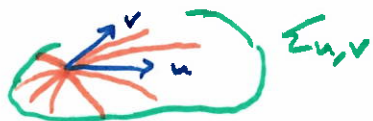
CURVATURA

PRIMERO, CONSIDERAMOS UNA EXTENSIÓN DE LA CURVATURA GAUSSIANA DE SUPERFICIES A VARIEDADES RIEMANNIANAS. SEA $u, v \in T_m M$ ORTONORMAL y CONSIDERA EL PARCHO $\Sigma_{u,v} \subset M$ QUE CONSISTE DE ARCOS DE GEODÉSICA CON CONDICIÓN INICIAL EN EL PLANO $\sigma_{u,v} = \text{span}(u, v) \subset T_m(M)$, CON LA RESTRICCIÓN DE g , $\Sigma_{u,v}$ ES UNA SUPERFICIE RIEMANNIANA Y

PODEMOS

$$K_m(\sigma_{u,v}) := \text{CURVATURA GAUSSIANA DE } \Sigma_{u,v} \text{ por } m$$

LLAMAMOS $K_m(\sigma)$ LA CURVATURA SECCIONAL



de (M, g) por el punto $m \in M$ y el plano $\sigma \subset T_m M$. DE NUESTRO TRABAJO CON SUPERFICIES TENEMOS VARIAS INTERPRETACIONES GEOMETRICAS DE LOS VALORES DE $K_m(\sigma)$: TASAS DE DIVERGENCIA de geodesicas en $\Sigma_{u,v}$, DIFERENCIA INFINITESIMAL de areas en COMPARISON CON EUCLIDIANO, HOLONOMÍA DE TRANSPORTE PARALELO TANGENTE A $\Sigma_{u,v}$, ...

NOTAR QUE K_m NO ES UN TENSOR, MÁS BIEN CADA $m \in M$,

$$K_m : \text{Gr}(2, T_m M) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{donde } \text{Gr}(2, T_m M) = \{\text{planos en } T_m M \text{ por } \vec{0}\}.$$

AHORA CONSIDERAMOS HOLONOMÍA EN GENERAL de (M, g) (EN PRINCIPIO MÁS FINA QUE CURVATURA SECCIONAL ya que CAPTURA HOLONOMÍA A LO LARGO PLANOS).

SEA $x, y, z \in T_m M$. EN COORDENADAS LOCALES:

$$x = x^i \partial_i|_m, \quad y = y^j \partial_j|_m, \quad z = z^k \partial_k|_m \quad ; \quad x^i, y^j, z^k \in \mathbb{R}$$

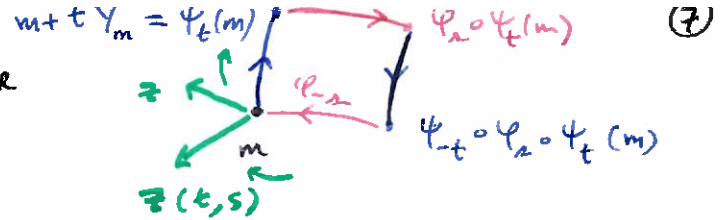
TENEMOS LAS EXTENSIONES:

$$X := x^i \partial_i, \quad Y := y^j \partial_j, \quad Z := z^k \partial_k \quad \text{A CAMPOS VECTORIALES LOCALES.}$$

* NOTAR QUE TALES EXTENSIONES NO SON GENERAL, DEBIDO A TODOS CORCHETES CERO:

$$[X, Y] = [Y, Z] = [Z, X] = 0. \quad *$$

CALCULAMOS LA HOLONOMÍA EN EL TRANSPORTE PARALELO DE $z \in T_m M$ ALREDEDOR EL PARALELOGRAMO $m, m+ty, m+ty+sx, m+sx$ LO QUE ES EL LAZO FORMADO POR



$m \rightarrow \psi_t(m) \rightarrow \psi_t \circ \varphi_s(m) \rightarrow \psi_{-t} \circ \varphi_s \circ \psi_t(m) \rightarrow \varphi_{-s} \circ \psi_{-t} \circ \varphi_s \circ \psi_t(m)$ donde

ψ_t es el FLUJO DE Y y φ_s el FLUJO DE X .

SEA $z(t,s) \in T_m M$ EL TRANSPORTE PARALELO DE z ALREDEDOR ESTE PARALELOGRAMO.

$$\text{DEFINIMOS } \hat{R}_m(x,y)z := \left. \frac{d^2}{dt ds} \right|_{t=s=0} z(t,s) \in T_p M$$

PARA LA "HOLONOMÍA INFINITESIMAL" EN TRANSP. PARR. DE z ALREDEDOR LA PARALELOGRAMA CON LADOS ty, sx .

UNA EXPRESIÓN EXPLÍCITA SIGUE DE NOTANDO QUE PARA z_t TRANSP. PARR. DE z A $\psi_t(m)$ TENEMOS: $\dot{z}_0 = -\nabla_Y z(m)$ y $z_0 = z$

$$\Rightarrow z_t = z - t \nabla_Y z(m) + O(t^2)$$

POR EXPANSIÓN DE TAYLOR. APLICANDO (*) A LOS LADOS DEL PARALELOGRAMA QUE QUEDAN Y RETENIENDO EL TÉRMINO CON COEFF. 'ts' CONDUCE A:

$$z(t,s) = ts (\nabla_X \nabla_Y z - \nabla_Y \nabla_X z)|_m + O(t^2, s^2) + O_3(t,s)$$

$$\Rightarrow \hat{R}_m(x,y)z = \nabla_X \nabla_Y z - \nabla_Y \nabla_X z|_m \in T_m M.$$

OBSERVA QUE (*) NO DEFINE UN TENSOR TIPO (1,3) DEBIDO A SOLO ESTA VALIDO PARA EXTENSIONES QUE CONUTAN ($[X,Y]=0$) y NO ES $\mathcal{F}(M)$ LINEAL POR CAMPOS VECTORIALES GENERAL. PARA DERIVAR EL TÉRMINO DE AJUSTAMIENTO, CALCULAMOS:

$$\hat{R}_m(fX, Y)z = f \hat{R}_m(X, Y)z + \nabla_{[fX, Y]} z$$

$$\hat{R}_m(X, fY)z = f \hat{R}_m(X, Y)z + \nabla_{[X, fY]} z$$

$$\hat{R}_m(X, Y) f z = f \hat{R}_m(X, Y)z$$

$\forall X, Y, z \in \mathcal{F}(M)$ con $[X, Y]=0$ y $f \in \mathcal{F}(M)$.

QUE MOTIVA

$$R_m(X, Y)z := \nabla_X \nabla_Y z - \nabla_Y \nabla_X z - \nabla_{[X, Y]} z$$

$\forall X, Y, z \in \mathcal{F}(M)$, y que de hecho define un TENSOR TIPO (1,3), LA TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN.

PARA RELACIONAR R_m CON K , LA FORMULA DE HOLONOMIA SOBRE SUPERFICIES CONDUCE A:

$$K_m(G_{u,v}) = \frac{g(R_m(u,v)v, u)}{|u|^2|v|^2 - g(u,v)^2} \quad G_{u,v} = \text{span}(u,v).$$

EN COORDENADAS, ESCRIBIMOS LOS COMPONENTES DE R_m POR:

$$R_m(\partial_i, \partial_j)\partial_k =: R_{ijk}^l \partial_l$$

TENEMOS LAS EXPRESIONES: $R_{ijk}^l = T_{jk,i}^l - T_{ik,j}^l + T_{jk}^m T_{im}^l - T_{ik}^m T_{jm}^l$

$$y \quad \frac{g_{ik} R_{ijj}^k}{g_{ii} g_{jj} - g_{ij}^2} = K(\sigma_{\partial_i, \partial_j}).$$

* LA TENSOR R_m ESTA DEFINIDO EN LA MISMA MANERA PARA UN CONEXION AFINA GENERAL. TIENE LA SIMETRIA:

$$R_m(x,y)z = -R_m(y,x)z, \quad \text{o EN COORDENADAS } R_{ijk}^l = -R_{jik}^l.$$

ADEMAS, CUANDO ∇ ES LIBRE DE TORSION (COMO LEVI-CIVITA) TENEMOS:

$$R_m(x,y)z + R_m(y,z)x + R_m(z,x)y = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

O EN COMPONENTES: $R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0$, LLAMADO LA IDENTIDAD

DE JACOBI, O PRIMERA IDENTIDAD DE BIANCHI.

LA SEGUNDA IDENTIDAD DE BIANCHI ES QUE:

$$(\nabla_x R_m)(y,z)u + (\nabla_y R_m)(z,x)u + (\nabla_z R_m)(x,y)u = 0$$

VALIDO PARA CUALQUIER CONEXION AFINA LIBRE DE TORSION.

ADEMAS, PARA LA CONEXION DE LEVI-CIVITA, TENEMOS:

$$g(R_m(x,y)z, w) = g(R_m(z,w)x, y). \quad *$$

ECUACIONES ESTRUCTURALES DE CARTAN

SEA $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{E}_{loc}^1(M)$ UNA MARCA ORTONORMAL (LOCAL) PARA (M, g) ,

- TALES MARCAS SIEMPRE EXISTEN, P.EJ. EN APLICANDO GRAHAM-SCHMIDT A UN BASE $\partial_1, \dots, \partial_m$ COORDENETARIA -

CON $\omega^1, \dots, \omega^m \in \Omega_{loc}^1(M)$ LA CORRESPONDIENTE BASE DUAL.

DEFINIMOS

$$\nabla e_i =: \omega_i^j \otimes e_j, \quad \text{PARA } \omega_i^j \in \Omega_{\omega}^1(M)$$

(9)

LAS 1-FORMAS DE CONEXIÓN. OBSERVA QUE $\omega_i^j = \Gamma_{kj}^i \omega^k$ PARA

Γ_{kj}^i LOS SÍMBOLOS DE CRISTOFFER DE LA CONEXIÓN ∇ (LEVI-LEVITA).

DEBIDO A $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ Y COMPATIBILIDAD DE ∇ CON g TENEMOS $\forall X \in \mathcal{X}(M)$:

$$0 = X g(e_i, e_j) = g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) = \omega_i^j(X) + \omega_j^i(X)$$

$$\Rightarrow \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (*)$$

QUE REFLEJA EN TÉRMINOS DE MANOS QUE TRANSPORTE PARALELO ES ISOMETRÍA.

DEBIDO A ∇ ES LIBRE DE TORSIÓN, TENEMOS:

$$d\omega^i(e_j, e_k) = e_j \cdot \delta_k^i - e_k \cdot \delta_j^i - \omega^i([e_j, e_k])$$

$$= \omega^i(\nabla_{e_k} e_j - \nabla_{e_j} e_k) = \omega_j^i(e_k) - \omega_k^i(e_j) = \omega^j \wedge \omega_k^i(e_j, e_k)$$

$$\Rightarrow d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \quad (**)$$

YA QUE CADA CONEXIÓN DE LEVI-LEVITA ES ÚNICAMENTE DETERMINADA POR SU COMPATIBILIDAD CON g , SIEMPRE EXISTE ÚNICA SOLUCIÓN, ω_j^i , A LAS ECUACIONES $(*)$, $(**)$.

PARA RELACIONAR LAS FORMAS DE CONEXIÓN CON LA HOLONOMÍA, CONSIDERA UNA CURVA $(c(t), v(t)) \in TM$ ($v(t) \in T_{c(t)}M$ ES UN CAMPO VECTORIAL A LO LARGO c) ESCRIBIENDO $v(t) = v^j(t) e_j(c(t))$, TENEMOS:

$$\nabla_{\dot{c}} v = \dot{v} + \omega(\dot{c}) \cdot v$$

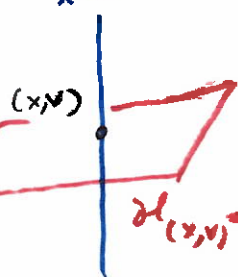
DONDE $\dot{v} = \dot{v}^j e_j$ Y ω ES LA MATRIZ (ANTI-SIMÉTRICA) DE CONEXIÓN 1-FORMAS. COMO OPERADOR, $\omega(\dot{c}): TM \rightarrow TM$ $v \mapsto \omega_j^k(\dot{c}) v^j e_k =: \omega(\dot{c}) \cdot v$.

OBSERVA: $* \quad v \parallel c \Leftrightarrow \dot{v} = -\omega(\dot{c}) \cdot v$

* PODEMOS PENSAR DE LAS COMPONENTES DE $\omega \cdot v$ COMO 1-FORMAS SOBRE TM : $(\omega \cdot v)_{(x,v)}(\dot{x}, \dot{v}) =: \omega_x(\dot{x}) \cdot v$

* LA CONEXIÓN DETERMINA UNA DISTRIBUCIÓN HORIZONTAL SOBRE TM . A SABER $\mathcal{H}_{(x,v)} = \{v \in T_{(x,v)} TM \mid \nabla_{\dot{x}} v = 0\}$ EL FRASE HORIZONTAL SIGNIFICA QUE $\mathcal{H}$ ESTÁ TRANSVERSA A LAS FIBRAS, $T_x M$, de $\pi: TM \rightarrow M$ (LAS ESPACIOS TANGENTES A TAL FIBRAS LLAMADOS ESPACIOS VERTICALES).

$T_x M$

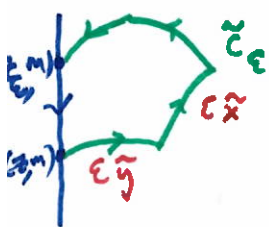
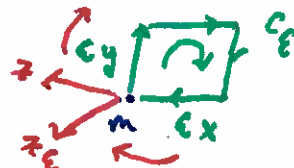


$$\mathcal{H}_{(x,v)} = \{\dot{v} + \omega(\dot{x}) \cdot v = 0\} \subset T_{(x,v)} TM$$

Ahora, sea $x, y, z \in T_m M$ y $c_\epsilon \subset M$ el paralelogramo infinitesimal
 $m, m+\epsilon y, m+\epsilon x$ (COORDENADAS LOCALES). (10)

PARA $\tilde{c}_\epsilon(t) = (c_\epsilon(t), z(t))$ CON $z(t)$

TRANSF. PAR. DE z A LO LARGO c_ϵ , TENEMOS:



$$z_\epsilon - z = - \oint_{\tilde{c}_\epsilon} \omega \cdot v = \epsilon^2 d(\omega \cdot v)_{(m, z)}(\tilde{x}, \tilde{y}) + o(\epsilon^2)$$

$$\tilde{c}_\epsilon \text{ vez} = \epsilon^2 R(x, y) z + o(\epsilon^2)$$

POR DEFINICIÓN DE DERIVADA EXTERIOR (AQUI APLICADO COMPONENTES DE $\omega \cdot v$)

y DEFINICIÓN DE R_m . AQUI $\tilde{x} = x \partial_m - \omega(x) \cdot z \partial_v \in T_{(m, z)} TM$ CON

$$\tilde{y} = y \partial_m - \omega(y) \cdot z \partial_v$$

LOS LEVANTAMIENTOS HORIZONTALES DE x, y (LOS LADOS DEL PARALELOGRAMO INFINITESIMAL $\tilde{c}_\epsilon$). CALCULAMOS:

$$d(\omega_j^k v^i) e_k = (d\omega_j^k z^i + dv^i \wedge \omega_j^k) e_k \quad y$$

$$dv^i(\tilde{x}) = -\omega_l^i(x) z^l, \quad dv^i(\tilde{y}) = -\omega_l^i(y) z^l.$$

$$\text{ENTONCES: } d(\omega \cdot v)_{(m, z)}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(d\omega_j^k(x, y) z^j - \omega_l^i(x) \omega_j^k(y) z^l + \omega_l^i(y) \omega_j^k(x) z^l \right) e_k$$

$$= (d\omega_j^k(x, y) - \omega_j^l(x) \omega_l^k(y) + \omega_j^l(y) \omega_l^k(x)) z^j e_k$$

$$= (d\omega_j^k - \omega_j^l \wedge \omega_l^k)(x, y) z^j e_k =: \Omega_j^k(x, y) z^j e_k$$

CON ~~la siguiente definición~~

$$\Omega_j^k = d\omega_j^k - \omega_j^l \wedge \omega_l^k \quad (*)$$

LAS 2-FORMAS DE CURVATURA DE LA CONEXIÓN (LEVI-CEVITA). ESCRIBIENDO

Ω PARA EL MATRIZ DE CURVATURA FORMAS [COMO OPERADOR $\Omega(x, y): TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $z^j e_k \mapsto \Omega_j^k(x, y) z^j e_k =: \Omega(x, y) \cdot z$], TENEMOS

$$\Omega(x, y) z = R_m(x, y) z \quad y \text{ SE PUEDE ESCRIBIR FORMA MATRICIAL DE } (*)$$

COMO $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$. EN LAS COORDENADAS DE LA MARCA $\{e_i\}$ TENEMOS:

$$\Omega(e_i, e_j) e_k = \Omega_{ij}^k(e_i, e_j) e_k = R_{ij}^l e_l = R_m(e_i, e_j) e_k$$

$$\Rightarrow \Omega_{ij}^l(e_i, e_j) = R_{ijk}^l.$$

LLAMAMOS $(*)$, $(*)$, $(*)$ LAS ECUACIONES STRUCTURAL DE CARTAN. (11)

SON TÍPICAMENTE MÁS FÁCIL MANIPULAR EN COMPUTACIONES QUE LAS EXPRESIONES EN SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL.

EN REALIDAD, PODEMOS DERIVAR LA EXPRESIÓN PARA R_m EN TÉRMINOS DE ∇ USANDO LAS ECUACIONES DE CARTAN.

PRIMER, TENEMOS EL (1,2) TENSOR $\nabla \nabla e_k =: \nabla^2 e_k$ DADO POR:

$$\nabla^2 e_k(e_i, e_j) = \nabla_{e_i}(\nabla e_k)(e_j) = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j} e_k$$

ENTONCES:

$$\begin{aligned} \nabla^2 e_k(e_i, e_j) - \nabla^2 e_k(e_j, e_i) &= \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \underbrace{\nabla_{\nabla_{e_i} e_j} - \nabla_{\nabla_{e_j} e_i}}_{[e_i, e_j] \text{ (LIBRE DE TORSIÓN)}} \right) e_k \\ &\stackrel{(1)}{=} \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i, e_j]} \right) e_k. \end{aligned}$$

POR OTRO LADO, CON LA REGLA DE LEIBNIZ PARA LA DERIVACIÓN ∇_X (~~X~~ $X \in \mathcal{X}(M)$)

$$\text{TENEMOS } \nabla_X \nabla e_k = (\nabla_X \omega_k^l) \otimes e_l + \omega_k^l \otimes \nabla_X e_l = \nabla^2 e_k(X, \cdot)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 e_k = \left(\nabla \omega_k^l + \omega_m^l \otimes \omega_k^m \right) \otimes e_l, \text{ y AHORA:}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 e_k(e_i, e_j) - \nabla^2 e_k(e_j, e_i) &= \left(e_i \cdot \omega_k^l(e_j) - e_j \cdot \omega_k^l(e_i) - \omega_k^l(\underbrace{\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i}_{[e_i, e_j]}) \right. \\ &\quad \left. + \omega_m^l(e_i) \omega_k^m(e_j) - \omega_m^l(e_j) \omega_k^m(e_i) \right) e_l \end{aligned}$$

$$[\text{USANDO } \nabla \omega_k^l(X, Y) = X \cdot \omega_k^l(Y) - \omega_k^l(\nabla_X Y)]$$

$$= \left(d\omega_k^l(e_i, e_j) - \omega_k^m \wedge \omega_m^l(e_i, e_j) \right) e_l$$

$$[\text{USANDO } d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])]$$

$$\stackrel{(2)}{=} \Omega_k^l(e_i, e_j) e_l = \Omega(e_i, e_j) \cdot e_k = R_m(e_i, e_j) e_k$$

DE $(1) = (2)$, TENEMOS

$$R_m(e_i, e_j) e_k = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k,$$

COMO ANTES.

OTRA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL EN FACILITAR COMPUTACIONES DE LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA SON EN USANDO COORDENADAS NORMALES.

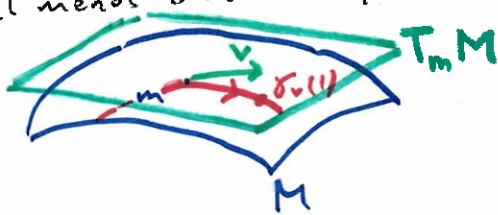
SU DEFINICIÓN ES BASADO EN LA APLICACIÓN EXPONENCIAL:

$$\exp_m: T_m M \rightarrow M \quad v \mapsto \gamma_v(1)$$

DONDE $\gamma_v(t)$ DENOTA LA GEODÉSICA DE (M, g) CON CONDICIONES INICIALES

$$\gamma_v(0) = m, \quad \dot{\gamma}_v(0) = v. \quad \text{NOTAR QUE } \gamma_v(\lambda t) = \gamma_{\lambda v}(t) \quad \text{PARA } \lambda \in \mathbb{R}$$

Y ENTONCES $\exp_m(\lambda v) = \gamma_v(\lambda)$. DEBIDO A QUE CADA GEODÉSICA ESTA DEFINIDO POR ALGÚN INTERVALO ABIERTO DE TIEMPO, $\exp_m$ ESTA SIEMPRE AL MENOS DEFINIDO POR ALGÚN BARRIO DE $\vec{0} \in T_m M$.



ADENAS ~~DE HECHO~~ $\exp_m$ ESTA BIJECTIVA (UN DIFEOMORFISMO) SOBRE ALGÚN BARRIO DE $\vec{0} \in T_m M$, QUE SIGUE DE LA TEOREMA FUNCIONES INVERSA Y LA COMPUTACIÓN: $d_{\vec{0}} \exp_m(v) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \exp_m(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \gamma_v(t) = v$ EN LA IDENTIDAD, EN PARTICULAR INVERTIBLE.

UNA SISTEMA DE COORDENADAS NORMALES ALREDEDOR $m \in M$ CONSISTE EN ESCOGER UN BASE ORTONORMAL $\{e_i\}_m$ DE $T_m M$ Y ASOCIANDO

$$x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \rightarrow \exp_m(x^i e_i)_m \in M$$

QUE, SEGÚN LOS COMENTARIOS ARRIBA DEFINA UNA SISTEMA DE COORDENADAS PARA $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ ALGÚN BARRIO DEL ORIGEN.

SUS PROPIEDADES CONVENIENTES SURGEN DE:

* RAYOS POR EL ORIGEN $tv = t(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$ PRESENTAN GEODÉSICAS DE (M, g)

$$* g_{ij}(0) = g_m(e_i)_m, (e_j)_m) = \delta_{ij}$$

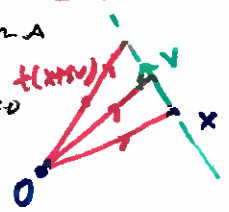
$$* T_{ij}^k(0) = 0; \text{ ya que } tv \text{ geodésica} \Rightarrow v^i v^j T_{ij}^k(tv) = 0 \\ \Rightarrow v^i v^j T_{ij}^k(0) = 0 \quad \forall v^i, v^j \in \mathbb{R} \Rightarrow T_{ij}^k(0) = 0.$$

$$* g_{ij,k}(0) = 0; \text{ ya que } \partial_k g(\partial_i, \partial_j) \Big|_0 = g_{lj} T_{ki}^l + g_{im} T_{kj}^m \Big|_0 = T_{ki}^j + T_{kj}^i \Big|_0 = 0.$$

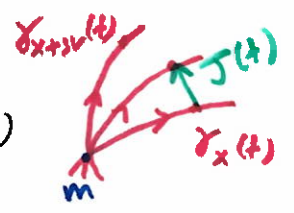
DE HECHO, HAY UN BUEN 'TRUQUE' CALCULAR LA EXPANSIÓN DE
 DE ALMEDEDA ORÍGEN EN COORDENADAS NORMALES USANDO 'CAMPOS
 DE JACOBI'. A SABER, SEA $x, v \in \mathbb{R}^m$ Y CONSIDERA

$$\gamma_{x+sv}(t) = \exp(t(x+sv))$$

(UNA FAMILIA DE 1-PARAMETRO
 DE GEODÉSICAS)



CON $J(t) := \frac{d}{dt} \big|_0 \gamma_{x+sv}(t) = \exp_*(tv) \in T_{\gamma_x(t)} M$



ENTONCES, $t^2 g_{ij}(tx) v^i v^j = g_{tx}(tv, tv) = g_{\gamma_x(t)}(\exp_* tv, \exp_* tv)$

$$(*) = |J(t)|^2$$

Y NOS INTERESAN EXPANDIR $J(t)$ EN POTENCIAS DE t . PRIMERO:

$J(0) = 0$; $\dot{J}(0) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \big|_{t=0, s=0} \gamma_{x+sv}(t) = \frac{d}{ds} \big|_0 x+sv = v$.

PROXIMA, TENEMOS LA PARAMETRIZACIÓN LOCAL:

$(t, s) \xrightarrow{\varphi} \exp(t(x+sv))$ PARA QUE $\hat{J} = \varphi_* \partial_t$, $T = \varphi_* \partial_s \in \mathcal{X}(M)$

EXTIENDEN $J(t)$ Y $\dot{\gamma}_x(t)$ (DE HECHO $T = \dot{\gamma}_{x+sv}(t)$).

DEBIDO A QUE $\gamma_{x+sv}(t)$ son geodésicas:

$$\nabla_T T = 0.$$

Y POR INVARIANCIA DE CORCHETES DE LIE BATA COORDENADAS:

$$[T, \hat{J}] = \varphi_* [\partial_t, \partial_s] = 0$$

ENTONCES: $\nabla_T \hat{J} - \nabla_{\hat{J}} T = [T, \hat{J}] = 0 \Rightarrow \nabla_T \nabla_T \hat{J} = \nabla_{\hat{J}} \nabla_{\hat{J}} T$

$$\Rightarrow \nabla_T \nabla_T \hat{J} = \nabla_T \nabla_{\hat{J}} T - \underbrace{\nabla_{\hat{J}} \nabla_T T}_0 - \underbrace{\nabla_{[T, \hat{J}]} T}_0 = R_m(T, \hat{J})T$$

QUE SOBRE $\gamma_x(t)$ IMPLICA:

$$\ddot{J}(t) = R_m(\dot{\gamma}_x(t), J(t)) \dot{\gamma}_x(t)$$

Y EN PARTICULAR $\ddot{J}(0) = 0$ (PORQUE $J(0) = 0$).

AHORRA: $\nabla_T \nabla_T \nabla_T \hat{J} = \nabla_T R_m(T, \hat{J})T = (\nabla_T R_m)(T, \hat{J})T + R_m(T, \nabla_T \hat{J})T$
 (USANDO $\nabla_T T = 0$).

POR $t=0$ OBTENEMOS: $\ddot{J}(0) = R_m(x, v)x$, Y ENTONCES:

$$J(t) = tv + \frac{t^3}{6} R_m(x, v)x + O(t^4)$$

* EN PRINCIPIO, SE PUEDE USAR ESTE MÉTODO PARA IR A CUALQUIER ORDEN *

SUBSTITUYENDO EN (*) NOS CONDUCE A:

$$t^2 g_{ij}(tx) v^i v^j \stackrel{(*)}{=} t^2 |v|^2 + \frac{t^4}{3} g(Rm(x,v)x,v) + O(t^5), \quad (14)$$

DEFINIMOS EL TENSOR DE RIEMANN CON INDICE BAJADO POR LA MÉTRICA COMO EL $(0,4)$ -TENSOR:

$$(x, y, z, w) \mapsto g(Rm(x, y)z, w)$$

$$\text{ESCRIBIMOS SUS COMPONENTES COMO } R_{ijkl} := g(Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) = g_{ml} R^m_{ijk}.$$

CANCELANDO EL t^2 EN $(*)$, y expansión de $g_{ij}(tx)$ en t (TAYLOR) NOS DA:

$$v^i v^j g_{ij}(0) + t g_{ij,k}(0) x^k v^i v^j + \frac{t^2}{2} g_{ij,kl}(0) x^k x^l v^i v^j + O(t^3)$$

$$= v^i v^j \delta_{ij} - \frac{t^2}{3} R_{kijl}(0) x^k x^l v^i v^j + O(t^3) \quad \forall v^i, v^j \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{t^2}{3} R_{kijl} x^k x^l + O(t^3), \quad \text{ó bien LA EXPANSIÓN:}$$

$$g \stackrel{(*)}{=} (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - \frac{1}{3} R_{kijl} x^k x^l dx^i dx^j + O_3(x^3)$$

PARA LA MÉTRICA EN COORDENADAS NORMALES — HISTÓRICAMENTE, RIEMANN INTRODUCIÓ EL TENSOR Rm EXACTAMENTE POR TAL EXPANSIÓN $(*)$, LOS COMPONENTES PRESENTAN LA OBSTRUCCIÓN EN INTENTANDO CAMBIAR TAL MÉTRICA g A FORMA EUCLIDEANA: $(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$.

COMO APLICACIÓN CONSIDERAMOS EXPRESIONES DE CAMBIOS DE VOLUMEN.

SEA ω_g el formen de volumen para (M, g) INDUCIDA POR g :

$\omega_g(e_1, \dots, e_m) = 1$ cada base ortonormal $\{e_j\}$ ORIENTADA (EN REALIDAD UNO PUEDE CONSIDERAR 'DENSIDADES' SOBRE M PARA QUITAR LA HIPÓTESIS DE ORIENTABILIDAD).

PRIMERO VERIFICAMOS QUE EN COORDENADAS generales, tenemos:

$$\omega_g = \sqrt{\det(g)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m; \quad \det(g) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots \\ g_{12} & g_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

OBSERVA QUE UN PRODUCTO INTERIOR NO-DEGENERADO ES EQUIVALENTE A UN ISOMORFISMO $V \xrightarrow{g} V^*$ $v \mapsto (g v, \cdot) = \langle v, \cdot \rangle$ PARA ESPACIOS VECTORIALES $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. LA SIGUIENTE DIAGRAMA SIEMPRE CONUTA:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id} & V \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V^* & \xleftarrow{id^*} & V^* \end{array}$$

y TOMANDO BASES $\{e_j\}$, $\{e^j\}$ de V CON DUALES $\{\tilde{e}^j\}$, $\{\omega^j\}$

TENEMOS: $\mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ con A CAMBIO DE BASE ($A\partial_j = \partial_j$ ó (15)
 $\partial_j = a_j^k e_k$ con a_j^k ENTRADAS de A)
 $\begin{matrix} g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ \mathbb{R}^m & \xleftarrow{A^T} & \mathbb{R}^m \end{matrix}$ y A^T LA TRANSPOSE (MATRIZ id^* en BASE $\omega_j, d\tilde{i}$)
y g_1, g_2 MATRIZ de g en bases $\{\partial_j\}, \{d\tilde{i}\}, \{e_k\}, \{\tilde{w}_i\}$.

ENTONCES, CUANDO $\{e_j\}$ es ortonormal: $g_2 = id$ y $\bar{A}A^T = g_1$, ENTONCES

$\det(A)^2 = \det(g_1)$. PARA EL FORMEN DE VOLUMEN TENEMOS CON

$\partial_j = a_j^k e_k$ $A = (a_j^k)$ QUE $\omega_g(\partial_1, \dots, \partial_m) = \det A dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$
con $\det A = \sqrt{\det(g_1)}$ COMO DESIREMOS.

AHORA DESDE (*) y $\det(I + A) = 1 + \text{tr}(A) + O(|A|^2)$, TENEMOS

$$\det g_{ij} = 1 - \frac{1}{3} R_{ikl}^i x^k x^l + O_3(x^i) \quad \text{ó}$$

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = 1 - \frac{1}{6} R_{ikl}^i x^k x^l + O_3(x^i). \quad \text{PONIENDO}$$

$Ric(x, x) = \text{tr}(x \mapsto R_m(x, x)y)$ PARA EL $(0,2)$ -TENSOR QUE ES
CONTRACCIÓN de R_m , TENEMOS LA EXPANSION PARA EL ELEMENTO de VOLUMEN
COORDENADAS NORMALES:

$$\omega_g = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m - \frac{1}{6} Ric_0(x, x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m + O_3(x)$$

DONDE, Ric es la curvatura de Ricci.

RESULTA DE LAS SIMETRÍAS de R_m que Ric es una $(0,2)$ -TENSOR SIMÉTRICA:

$Ric(x, y) = Ric(y, x)$. INTEGRANDO LA EXPANSION DE FORMA DE VOLUMEN

$$\text{CONDUCE A} \quad Vol_g(B_m(r)) = \left(1 - \frac{r^2}{6(n+2)} \text{Scal}(m) + O(r^4)\right) Vol_{Euc}(B(r))$$

DONDE $B_m(r)$ es una bola geodésica de radio r y $\text{Scal}: M \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura
SCALAR de (M, g) dado por una CONTRACCIÓN de Ric con INDICE ARRIBA:

$$\text{Scal}(m) = g^{ij} Ric_{ij} \quad (\text{en COORDENADAS GENERALES}).$$