

Ejemplo:

①

1) Gráfica - $z = u(x, y)$ parametrizada como:

$$f(x, y) = (x, y, u(x, y)).$$

De $f_x = (1, 0, u_x)$, $f_y = (0, 1, u_y)$, tenemos

$$da^2 = g = f^* I = (1 + u_x^2) dx^2 + 2u_x u_y dx dy + (1 + u_y^2) dy^2$$

De $n(x, y) = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$, tenemos $(h_{ij} = n \cdot f_{ij})$

$$h = f^* II = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} (u_{xx} dx^2 + 2u_{xy} dx dy + u_{yy} dy^2)$$

Para determinar expresiones para la curvatura, consideramos el operador de formas en coordenadas.

Un vector $v \in T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$ enviamos a $w \in T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ t.q.

$$d_{(x,y)} f(w) = d_{(x,y)} n(v) \quad \begin{array}{ccc} T\xi & \xrightarrow{dv} & T\xi \\ df \uparrow & & \downarrow (df)^{-1} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^2 \\ v & \xrightarrow{\quad} & w \end{array}$$

En particular, para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$da^2_{(x,y)}(w, \xi) = df(w) \cdot df(\xi) = dn(v) \cdot df(\xi) = -h_{(x,y)}(v, \xi).$$

Entonces $g w \cdot \xi \stackrel{(*)}{=} -h v \cdot \xi$ donde $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$

son las representaciones matriciales en words de I, II .

Debido a que $(*)$ queda $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$w = -g^{-1} h v$$

y la representación en coordenadas de la operador de formas es por la matriz $-g^{-1} h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ahora, calculamos la curvatura gaussiana y medio de la gráfica

por tomando det y tr de la operador de formas con

$$g = \begin{pmatrix} 1 + u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & 1 + u_y^2 \end{pmatrix} \quad h = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$$

que conduce a:

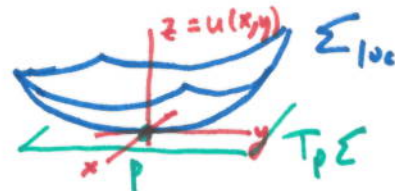
$$K(x,y) = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}, \quad H(x,y) = \frac{u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_{xy} + u_{yy}(1 + u_x^2)}{2(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}$$

(2)

* Dado un aplicación $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una solución de (*) resulta en una gráfica con tal curvatura GAUSSIANA PRESCRITO. Este EDP es un ejemplo de un EDP tipo MONTE-AMPERE.

* Como cada SUPERFICIE ES LOCALMENTE UNA gráfica, obtenemos una FORMA NORMAL LOCAL POR BASANDO NUESTRO SISTEMA DE COORDENADAS POR $p \in \Sigma$ con el plano x,y usando $T_p\Sigma$ y ejes x,y usando los ejes principales. En tal sistema de coordenadas, $u_x(p) = u_y(p) = 0$, y Σ está dado por

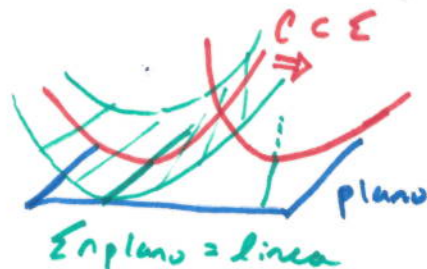
$$(x,y) \mapsto \left(x, y, \frac{K_1(p)}{2}x^2 + \frac{K_2(p)}{2}y^2 \right) + O_3(x,y).$$



2) SUPERFICIES Desarrollables - llamamos $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ desarrollable cuando uno de las siguientes condiciones equivalentes son satisfechas:

- (i) la curvatura GAUSSIANA de Σ es cero; $K = 0$
- (ii) Σ es la envolvente de una familia de planos que depende por uno parámetro
- (iii) Σ es 'aplicable' a un plano.

* entendemos (iii) como existe una curva $C \subset \Sigma$ t.q. al rodando Σ sobre un plano a lo largo de C , el plano tangente interseca el plano y Σ por una línea.



* PARA (ii), la envolvente de una familia de planos es algo tangente a los planos en cada punto. Por ejemplo, cada SUPERFICIE es la envolvente de sus planos tangentes.

El espacio de planos en $\mathbb{R}^3$ es 3-dimensional, ya que un plano está dado por $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$ determinando $\pi = \{Ax + By + Cz + D = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ que es equivalente al $\lambda(A,B,C,D)$ para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Los planos con $D \neq 0$ por ejemplo son parametrizados por las tres coordenadas: $a = \frac{A}{D}$, $b = \frac{B}{D}$, $c = \frac{C}{D}$.

3) Delineamos algunas construcciones / correspondencias de la geometría proyectiva.

- DENOTAMOS $\mathbb{P}^{3*} := \{ \vec{A} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \} / \{ \vec{A} \sim \lambda \vec{A}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$,

lo que pensamos como el 'conjunto de planos en espacio'.

Escribimos $(A:B:C:D) \in \mathbb{P}^{3*}$ para la clase de equivalencia de $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ (la línea $\{ \lambda(A,B,C,D) : \lambda \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^4$).

- PARA SIMETRIZAR la relación de incidencia: $Ax + By + Cz + D = 0$ ((x,y,z) en el plano $(A:B:C:D)$, ó bien el plano $(A:B:C:D)$ contiene el punto (x,y,z)), ponemos $x = \frac{X}{W}, y = \frac{Y}{W}, z = \frac{Z}{W}$ donde $(X:Y:Z:W) \in \mathbb{P}^3 := \{ \vec{X} = (X,Y,Z,W) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \} / \{ \vec{X} \sim \lambda \vec{X}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$.

- LA IGUALDAD DE POSICIÓN DE PUNTOS Y PLANOS EN LA RELACIÓN DE INCIDENCIA $(X:Y:Z:W) \in (A:B:C:D) \Leftrightarrow AX + BY + CZ + DW = 0$ CONDUCE A LAS SIGUIENTES CORRESPONDENCIAS DE DUALIDAD PROYECTIVA:

$\mathbb{P}^3$	$\mathbb{P}^{3*}$
plano $\longleftrightarrow$	punto
punto $\longleftrightarrow$	plano
línea $\longleftrightarrow$	línea

En este lenguaje, el proceso de tomar envolventes a una familia de planos es dual a la asignación:

$$\Sigma \subset \mathbb{P}^3 \rightarrow \Sigma^* \subset \mathbb{P}^{3*}, p \mapsto T_p \Sigma$$

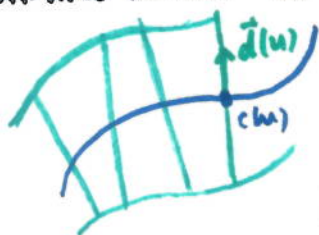
donde Σ^* consiste de los planos tangentes a Σ (entonces Σ es la env. de Σ^*).

Es decir, la envolvente de una dos parámetro familia de planos (una superficie $\Sigma^* \subset \mathbb{P}^{3*}$) son los puntos en $\mathbb{P}^3$ que corresponden a los planos tangentes de Σ^* .

- 'típicamente' los planos tangentes a un superficie $\Sigma \subset \mathbb{P}^3$ será un superficie $\Sigma^* \subset \mathbb{P}^{3*}$. Las superficies desarrollables son exactamente los para que Σ^* es una curva (ó quizá un punto). Por ejemplo, una gráfica, $\Sigma = \{ z = u(x,y) \}$ tiene dual Σ^* parametrizado por $(x,y) \mapsto (u_x : u_y : -1 : u - xu_x - yu_y)$ y se puede expresar la condición que Σ^* no es una superficie por el rango de la Jacobiano $(x,y) \mapsto (u_x, u_y, u - xu_x - yu_y) \in \mathbb{R}^3$ sea menor o igual a 1, es decir cuando: $u_{xx}u_{yy} = (u_{xy})^2$.

* MOTIVACIÓN PARA ESTUDIAR SUPERFICIES DESARROLLABLES VIENE DE APLICACIONES EN LA INDUSTRIA: SON FÁCIL A DOBLAR DE UN PLANO (POR EJEMPLO UN PLANO DE METAL).

* SUP. DES. SON UN CASO PARTICULAR DE SUPERFICIES REGLADAS: los par. que en cada punto $p \in \Sigma$ para (al menos) una línea contenida en Σ . UNA SUPERFICIE ~~REGLADA~~ REGLADA, SE PARAMETRIZA EN GENERAL POR:



$$(u, v) \mapsto c(u) + v \vec{d}(u)$$



hyperboloida de una hoja son REGLADAS, PERO NO DESARROLLABLES.

Ejemplos principales son cuando la derivación $\vec{d}(u) = \text{const} = \vec{d}$; cuando $\vec{d}(u) = \frac{dc}{du}(u)$ es tangente a la

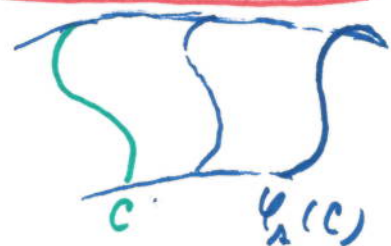
curva $c(u)$; para $c(u) \in \Sigma$ cuando $\vec{d}(u) = v(c(u))$ es normal a la superficie. En este último ejemplo uno puede verificar que la curva $c(u) \in \Sigma$ es una línea de curvatura exactamente cuando $c(u) + v v(c(u))$ es desarrollable.

* UNA SUP. REGLADA TAMBIÉN SE PUEDE DEFINIR COMO LA 'SUPERFICIE BARRIDA' por moviendo una línea por una familia de isometrías del espacio DEPENDE DE UN PARAMETRO $(t, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(l(t))$.



SON UN CASO PARTICULAR DE SUPERFICIES DE DARBOUX, formadas por la superficie BARRIDA por moviendo una curva general bajo una 1-param. familia de isometrías

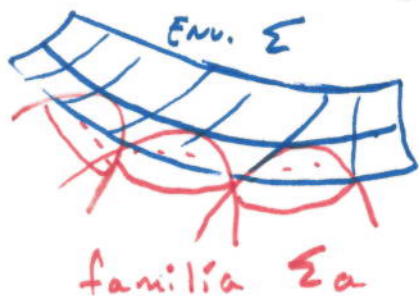
$$(t, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(c(t)).$$



* PODEMOS TOMAR ENVOLVENTES DE algunas familias generales.

Por ejemplo, la envolvente de una 1-parametro familia de superficies $\Sigma_a \subset \mathbb{E}^3$ con $a \in \mathbb{R}$ el parametro sea una superficie

Σ lo que es (i) tangente a cada superficie de la familia en sus puntos de intersección, ó equivalentemente (ii) la unión de las curvas (curvas características) en que miembros de la familia INTERSECTAN: $C_\epsilon(a) = \Sigma_a \cap \Sigma_{a+\epsilon}$ y $C(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_\epsilon(a)$ y $\Sigma = \bigcup C(a)$.



ANALITICAMENTE, si Σ_a son dados IMPLICITAMENTE por $\Sigma_a = \{f(x, y, z, a) = 0\}$, se obtenga la env. Σ por eliminación de a en las ecuaciones:

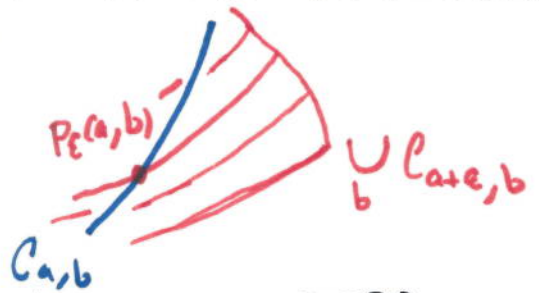
$$f(x, y, z, a) = 0 \quad \partial_a f(x, y, z, a) = 0.$$

TAMBIÉN LA ENVOLVENTE DE UNA 2-PARAM. FAMILIA DE CURVAS (5)

$C_{a,b} \subset E^3$ es en general UNA SUPERFICIE $\Sigma \subset E^3$ determinado por CUALQUIERA DE LAS CONDICIONES EQUIVALENTES

(i) Σ es tangente a cada curva de la familia por su punto de intersección.

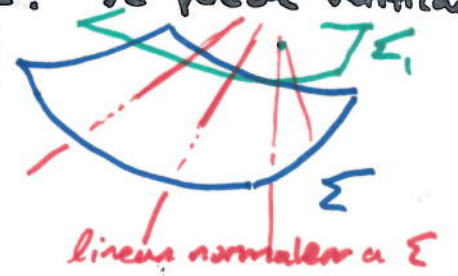
(ii) Σ es el lugar geométrico por intersección de curvas de la familia. Más preciso, $C_{a,b}$ y la superficie $\bigcup_b C_{a+\epsilon, b}$ en general intersectan por un punto $p_\epsilon(a,b)$, y $\Sigma = \bigcup_{a,b} p(a,b)$ donde $p(a,b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(a,b)$.



ANALITICAMENTE, si LA FAMILIA DE CURVAS está dado en FORMA PARAMETRIZADA $t \mapsto c(t, a, b)$ su ENVOLVENTE es obtenida por eliminación de t en $0 = \det \begin{bmatrix} \partial_t c & \partial_a c & \partial_b c \end{bmatrix} = \Delta(t, a, b)$ (es decir determinamos $t(a, b)$ y parametrizamos Σ por $(a, b) \mapsto c(t(a, b), a, b)$).

UN ejemplo de las superficies focales de una $\Sigma \subset E^3$ que son las envolventes de las líneas normales a Σ . Se puede verificar que son dados por $\Sigma_f = \{ p + \frac{1}{K_j(p)} \nu(p) : p \in \Sigma \}$

donde K_j son las curvaturas principales. SON RELEVANTES EN LA ÓPTICA, EN QUE si Σ es un FUENTE DE LUZ, Σ_f representan las CÚSTICAS producido por Σ - donde sea MÁS INTENSO LA LUZ EMITIDO por Σ .



3) SUPERFICIES MINIMALES - llamamos a las superficies satisfando una de las siguientes condiciones EQUIVALENTES:

- (i) la curvatura media es cero; $H = 0$
- (ii) la superficie es una EXTREMAL LOCAL DE LA FUNCIONAL DE AREA.

* LA TERMINOLOGÍA "MINIMAL" ES TÍPICA DE LA LENGUAJE 'OPTIMISTICA' que uno ENCONTRE EN EL CÁLCULO VARIACIONAL. PODRÍA SER UN POCO ENGAÑOSA EN EL SENTIDO QUE - SEGÚN MATHS DEF. - NO NECESARIAMENTE MINIMIZAN AREA, MÁS BIEN SON PUNTOS CRÍTICALES (EXTREMALES) DEL AREA (LO QUE ES NECESARIO PARA MINIMIZAR).*

CARACTERIZACIÓN (ii) entendemos en LA SIGUIENTE MANERA; PARA CADA $p \in \Sigma$ existe un RADIO ρ tal que



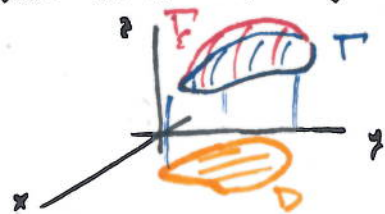
E.g. para cualquier variación con FRONTERA FIXADA, U_ϵ , de U tenemos $\frac{d}{d\epsilon}|_0 \text{Area}(U_\epsilon) = 0$ (la variación U_ϵ es una familia de 1-param. de superficies, $\epsilon \mapsto U_\epsilon$, con $U_0 = U$ y $\partial U_\epsilon = \partial U$).

- A VERIFICAR LA EQUIVALENCIA (i) $\Leftrightarrow$ (ii) LA SUFICIENTE CONSIDERAR EL CASO DE UNA GRÁFICA (CONDICIONES (i), (ii) SON LOCALES, Y CADA SUP. ES LOCALMENTE UNA GRÁFICA.)

Sea $z = u(x, y)$; $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ (UN REGIÓN COMPACTA); MUESTRA GRÁFICA, T .
ENTONCES $\text{Area}(T) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx \, dy$ (el elemento de área en un PACHECO COORDENADO general es $da = |\partial_u f \times \partial_v f| \, du \, dv$)

UNA VARIACIÓN POR GRÁFICA, T_ϵ , DADO POR $z = u(x, y) + \epsilon \eta(x, y)$ CON $\eta|_{\partial D} \equiv 0$ TIENE (POR DIFERENCIACIÓN BAJO EL INTEGRAL)

$$\frac{d}{d\epsilon}|_0 \text{Area}(T_\epsilon) = \int_D \frac{\nabla u \cdot \nabla \eta}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx \, dy$$



Por $X := \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$. De $\text{div}(\eta X) = X \cdot \nabla \eta + \eta \text{div}(X)$ y la teorema plano de divergencia: $\int_D \text{div}(\eta X) = \int_{\partial D} \eta X \cdot \hat{n} \, da = 0$ ($\eta \equiv 0$ sobre ∂D)

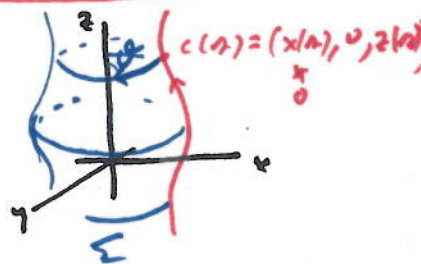
TENEMOS $\frac{d}{d\epsilon}|_0 \text{Area}(T_\epsilon) \stackrel{(*)}{=} - \int_D \eta \text{div}(X) \, dx \, dy$. ANTES CONDICIÓN (ii) DICE

LA EXPRESIÓN $(*)$ ES CERO POR CADA $\eta: D \rightarrow \mathbb{R}$ CON $\eta|_{\partial D} \equiv 0$, QUE ES POSIBLE SOLO CUANDO $\text{div}(X) = 0$. UN COMPUTACIÓN CONDUCE A $\text{div}(X) = H(x, y)$ LA CURVATURA MEDIA DE LA GRÁFICA $z = u(x, y)$ SEGÚN LA FÓRMULA DERIVADA EN EJEMPLO (1).

- CONSIDERAMOS EJEMPLOS EN EL CLASE DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN PARAM. POR $(\lambda, \theta) \mapsto (x(\lambda) \cos \theta, x(\lambda) \sin \theta, z(\lambda))$

ONDE TOMAMOS $\lambda \mapsto (x(\lambda), 0, z(\lambda))$ UN PARAM. POR LONG. DE ARCO DE LA LÍNEA GENERADORA.

CALCULAMOS:



$$g = d\lambda^2 + x(\lambda)^2 d\theta^2 ; \quad h = (x'\lambda'' - x''\lambda') d\lambda^2 + x\lambda' d\theta^2 \quad (7)$$

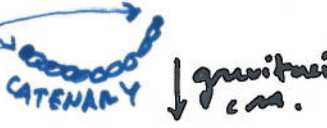
$$\Rightarrow K = -\frac{x''}{x} ; \quad 2H = x'\lambda'' - x''\lambda' + \frac{\lambda'}{x}$$

Reescribimos la condición $H=0$ como $x\lambda'(x'\lambda'' - x''\lambda') + (\lambda')^2 = 0$.
USANDO $(x')^2 + (\lambda')^2 = 1$ (param. por long.) y $x'x'' + \lambda'\lambda'' = 0$, OBTENEMOS:

$$1 = xx'' + (x')^2 = (xx')^2 \Rightarrow x^2 = \lambda^2 + a^2 \quad \text{algún cst. } a.$$

INTEGRANDO $(\lambda')^2 = 1 - (x')^2 = \frac{a^2}{\lambda^2 + a^2}$ con la sustitución $\lambda = a \sinh u$, DAMOS:

$$x = a \cosh\left(\frac{\lambda - b}{a}\right) \quad \text{algún cst. } b \quad (\text{que se puede tomar cero por que solo trasla la superficie})$$

LA CURVA PLANA (*) ES LA CURVA CATENARY, LO QUE ES LA FORMA EN QUE COLGA UNA CADENA BASTO GRAVITACIÓN UNIFORME. (fijando) 

EN UN CURSO FÍSICA, SE MUESTRA QUE LA CATENARY ESTA CARACTERIZADA (DEFINIDA) POR UN PRINCIPIO VARIACIONAL:

ES UN EXTREMAL DE $y \mapsto \int y \sqrt{1+(y')^2} dx$, LO QUE ES LA MISMA QUE EL FUNCIONAL DE ÁREA DE LA SUP. DE REV. POR RODEANDO $(x, y(x))$. LLAMAMOS A ESTE SUP. DE REV. MINIMAL LA CATENOID.

* OBSERVA QUE TAMBIÉN $\lambda'=0$ CONDUCE AL PLANO COMO UN SUP. MINIMAL (QUE CORRESPONDE A LA CONSTANTE ASO ARRIBA) *

LAS GEODÉSICAS EN UN SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN GENERAL SON 'INTEGRABLES' CON QUE SIGNIFICAMOS EXISTE DOS CONSTANTES DE MOVIM. QUE NOS PERMITE ESCRIBIR LA SOLUCIÓN EXPLICITAMENTE EN TERMINOS DE TALES CONSTANTES Y FUNCIONES PADRE. DE HECHO, LAS EDOs PARA LAS GEODÉSICAS SON:

$$\ddot{\lambda} = x(\lambda)x'(\lambda)\dot{\theta}^2 \quad x^2\dot{\theta} = C = \text{constante.}$$

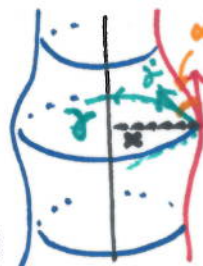
LA CONSTANTE DE MOVIMIENTO C (EN ADICIÓN A LA 'ENERGÍA' O VELOCIDAD $\dot{\lambda}^2 + x'^2\dot{\theta}^2$) ES LLAMADA EL INTEGRAL DE CLAIRAUT.

EXPLICITAMENTE, LAS GEODÉSICAS CON VELOCIDAD 1, Y C FIJAS

SON DADAS POR: $(\lambda, \theta(\lambda))$ DONDE $\theta(\lambda) = \int \frac{C d\lambda}{x(\lambda)\sqrt{x(\lambda)^2 - C^2}}$ (CUANDO $\lambda \neq 0$)

PARA UNA INTERPRETACIÓN MÁS GEOMÉTRICA, TENEMOS: $C = x \sin \alpha$

DONDE α ES EL ÁNGULO ENTRE $\dot{\gamma}$ Y LA LATITUD (DIRECCIÓN TANGENTE A LAS VERTICALES)

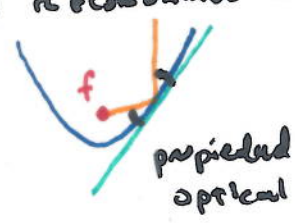


RESULTA QUE LO MÁS LEJOS AL $\gamma(\lambda)$ DEL EJE, LO MÁS VERTICAL ES SU DIRECCIÓN. ADEMÁS, SE ESTA RESTRIJDO AL REGIÓN CON $x \geq C$.

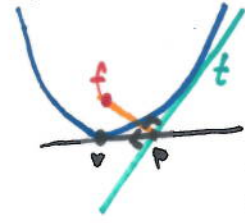
- INTERESES POR LAS SUPERFICIES MINIMAS VIENE DE SU USO PARA MODELAR ESTADOS DE EQUILIBRIO PARA HOJAS ELASTICAS - p.e.j. ^{formas de} DURANTAS - en la ausencia de presiones externas. EN LA PRESENCIA DE UNA PRESION EXTERNAL CONSTANTE, TALES FORMAS DE EQUILIBRIO SON SUPERFICIES CON CURIATURA MEDIO CONSTANTE. OTRA APLICACION ES EN LA TEORIA DE RELATIVIDAD, DONDE CIERTAS "SUP. MIN." MODELAN HORIZONTES DE EVENTOS DE HOJAS NEGATIVAS. EN ESTE SITUACION LES LLAMAN 'MOTS' = 'marginally ^{super} trapped surface'.

- LAS SUPERFICIES DE REVOLUCION CON CURIATURA MEDIO CONSTANTE, TIENEN UNA CONSTRUCCION BONITA (VER J. ELLIS - THE SURFACES OF DELAUNAY). TALES SUPERFICIES DE DELAUNAY SON FORMADAS PARA RODEANDO LA CURVA TRAZADA POR UN FOCO DE UNA CONICA CUANDO LA CONICA RODEA SIN RESBALAR A LO LARGO UNA LINEA.

0) RECORDAMOS LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DE LA PARABOLA:

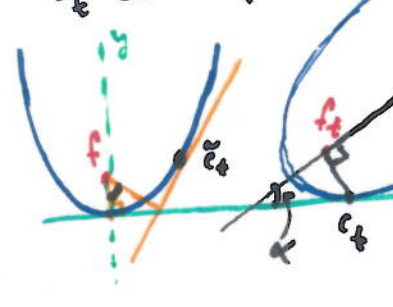


propiedad optica



$f_p \perp t$
donde p es la intersección de una tangente t con la LINEA TANGENTE en EL VERTICE v.

(*) EN RODEANDO SIN RESBALAR, la ~~curva~~ ^{curva} trazado por un punto general, $P_t = \varphi_t(p)$, tiene LINEA TANGENTE por P_t PERPENDICULAR A $P_t - C_t$, donde C_t es el punto DE CONTACTO:



linea tang. $t \rightarrow C_t = \varphi_t(p)$

PARAMETRIZANDO LA CURVA TRAZADO POR f_t EN ROL. SIN RESP. UN PARAB. SOBRE UNA LINEA $(x(\lambda), y(\lambda))$ por long. del arco, tenemos: $x' = \omega \sin \theta = \frac{c}{y}$ donde $c = |fv|$ es CONSTANTE (distancia de foco a VERTICE).

ENTONCES, con $(x')^2 + (y')^2 = 1$, TENEMOS $(y')^2 = 1 - \frac{c^2}{y^2}$, que CONDUCE A LA CURVA CATENARY, Y QUE RODEAMOS A LA CATEWID (CON $t=0 \Rightarrow c=0$).

1) SIMILARMENTE, ENTRAZANDO UN FOCO DURANTE RODEANDO SIN RESP. UNA ELIPSE O HIPERBOLA, CUANTANOS su param. por long. de arco $(x(\lambda), y(\lambda))$ SATISFACE

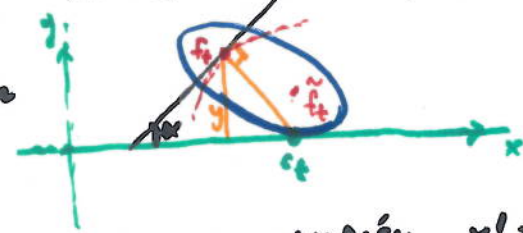
$y^2 - 2ayx' + b^2 = 0$ (elipse con eje mayor 2a, eje menor 2b),
 $y^2 - 2ayx' - b^2 = 0$ (hiperbola con eje mayor 2a, eje menor 2b).

QUE SE PUEDE VERIFICAR usando la propiedad (*) de rodando sin resb. y las siguientes "recuerdos" sobre conicas:



PROP. ÓPTICA: $\chi(t, e, f) = \chi(t, e, \tilde{f})$
 PARA UNA ELIPSE $|e f| + |e \tilde{f}| = 2a = \text{cm}$.

Ecuación PEDAL: $|f p| |\tilde{f} p| = b^2 = \text{const.}$



ahora, durante la rotación, tenemos

$x' = \cos \alpha = \frac{y}{|f_t e_t|}$, donde

e_t es el punto de contacto. Por la prop. óptica, también $x' = \frac{\tilde{y}}{|\tilde{f}_t e_t|}$,
 que conduce a $y + \tilde{y} = 2ax'$, y $\tilde{y} = b^2$ que implica (*).

La curva trazada por f en rotando una elipse es llamada una curva ONDULADA, por rotando una hipérbola, una curva MODADA (MODARY). En general alrededor de la línea sobre que sea rotada, obtenemos superficies de revolución: LA ONDULIDE Y MODIDE con curv. medio constante:

$2H_{und} = -K_{und} + \frac{x'}{y} = \frac{1}{a}$, $2H_{mod} = K_{mod} + \frac{x'}{y} = \frac{1}{a}$

* para calcular la curvatura, se puede usar $x'' = -K y'$ y

4) una SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAL, significa

$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ t.q. $\partial_{u_i} \psi \cdot \partial_{u_j} \psi = \delta_{ij}$. Equivalentemente, las superficies $\Sigma_{u_i} = \text{im} \psi|_{u_i = u_i^0}$ son ortogonales.



por ejemplo las coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas.

TEOREMA (DUPIN): Las superficies Σ_{u_i} , en una sistema ortogonal INTERSECTAN A LO LARGO SUS LÍNEAS DE CURVATURA.

=. Escribimos $\psi_i = \partial_{u_i} \psi$ para las derivadas parciales.

• un normal unitario a lo largo Σ_{u_2} es $v = \frac{\psi_1}{|\psi_1|}$.

• las superficies Σ_{u_1} y Σ_{u_3} INTERSECTAN EN LA DIRECCIÓN ψ_3

• el operador de formas en $\psi_3 \mapsto -dv(\psi_3) = -\psi_{13} / |\psi_1|$

• ψ_3 es un dirn. principal sobre Σ_{u_2} , ya que su imagen $-dv(\psi_3)$ es perpendicular a ψ_1 , y a ψ_2 es decir proporcional a ψ_3 . $\square$

(diff. de $\psi_i \cdot \psi_j = \delta_{ij}$ conduce a $\psi_{13} \cdot \psi_2 = -\psi_1 \cdot \psi_{23} = \psi_{12} \cdot \psi_3 = -\psi_2 \cdot \psi_{13} \Rightarrow \psi_{13} \cdot \psi_2 = 0$)

Por ejemplo, en las superficies cilíndricas / esféricas la triada de Dupin determina las líneas de curvatura para cilindros y conos.

Otro ejemplo de una sistema coordenado ortogonal son las coordenadas elipsoidales.

Para $a > b > c > 0$, sea $\Sigma_\lambda := \left\{ \frac{x^2}{c-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{a-\lambda} = 1 \right\}$ una familia de superficies cuadráticas en tres tipos:

Un miembro de cada tipo tienen intersección común por un punto única en cada octante.

$\lambda < c$ son Elipsoides

$c < \lambda < b$ son Hiperbóides de un hoja

$b < \lambda < a$ son Hiperbóides de dos hojas.

Las coordenadas

$$(u, v, w) \in (-a, c) \times (c, b) \times (b, a) \xrightarrow{\varphi} \Sigma_u \cap \Sigma_v \cap \Sigma_w \in \mathbb{R}^3_0$$

Forman una sistema ortogonal. Explícitamente, $\varphi(u, v, w) = (x, y, z)$

es la solución común a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{c-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{a-u} &= 1 \\ -\frac{x^2}{v-c} + \frac{y^2}{b-v} + \frac{z^2}{a-v} &= 1 \\ -\frac{x^2}{w-c} - \frac{y^2}{w-b} + \frac{z^2}{a-w} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

que es:
$$\begin{cases} x^2 = (c-u)(c-v)(c-w) / (c-b)(c-a) \\ y^2 = (b-u)(b-v)(b-w) / (b-a)(b-c) \\ z^2 = (a-u)(a-v)(a-w) / (a-b)(a-c) \end{cases}$$
 y tiene solución única en cada octante.

Ahora uno puede calcular directamente que φ es ortogonal:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{u-c}, \frac{y}{u-b}, \frac{z}{u-a} \right) & |\varphi_u|^2 &= \frac{1}{4} \frac{(v-u)(w-u)}{(a-u)(b-u)(c-u)} \\ \varphi_v &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{v-c}, \frac{y}{v-b}, \frac{z}{v-a} \right) & |\varphi_v|^2 &= \frac{1}{4} \frac{(u-v)(w-v)}{(a-v)(b-v)(c-v)} \\ \varphi_w &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{w-c}, \frac{y}{w-b}, \frac{z}{w-a} \right) & |\varphi_w|^2 &= \frac{1}{4} \frac{(u-w)(v-w)}{(a-w)(b-w)(c-w)} \end{aligned}$$

y las otras productos internos cero.

En particular, por Dupin determina las líneas de curvatura en tales superficies cuadráticas por tomando sus intersecciones:



* TALES COORDENADAS TAMBIÉN CONDUCE A LA INTEGRABILIDAD de las geodésicas en superficies cuadráticas.

DE HECHO, EL PRIMER FORMA FUNDAMENTAL EN ESTAS COORDENADAS ESTA EN LA FORMA GENERAL:

$$ds^2 = (A(x) - B(y)) (A_1(x)^2 dx^2 + B_1(y)^2 dy^2) \quad \left[\text{LLAMADA UNA ELEMENTO DE LONGITUD DE FORMA LIUVILLE.} \right]$$

[p.ej. Σ_u tiene $x=w, y=v$ y $A(w) = \frac{w}{4}, B(v) = \frac{v}{4},$

$$A_1(w)^2 = \frac{w-u}{(a-w)(w-b)(w-c)} \quad B_1(v)^2 = \frac{v-u}{(a-v)(b-v)(v-c)} \quad \left. \vphantom{\frac{w-u}{(a-w)(w-b)(w-c)}} \right]$$

Y ADMETEN LA ADICIONAL CONSTANTES DE MOVIMIENTO:

$$A(x(t)) \cos^2 \theta(t) + B(y(t)) \sin^2 \theta(t)$$

donde $\theta(t)$ ES el ángulo ENTRE LA VELOCIDAD DE LA geodésica y LAS LINEAS $y = ct$.

5) OTRAS SISTEMAS DE COORDENADAS IMPORTANTES SON:

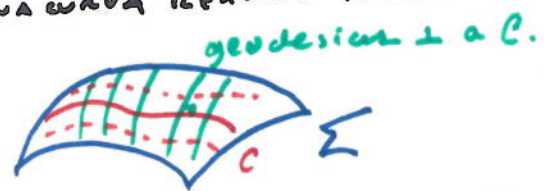
* COORDENADAS DE FERMI: SEA $t \mapsto c(t) \in \Sigma$ UNA CURVA REGULAR PARAM.

PARA CADA t , SEA $\gamma_t(\lambda)$ UNA geodésica con VELOCIDAD 1 y CONDICIÓN INICIAL

$\gamma_t(0) = c(t), \quad \gamma'_t(0) \perp \dot{c}(t)$. ENTONCES

$(t, \lambda) \mapsto \gamma_t(\lambda)$ FORMAN UNA SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS ALREDEDOR $c(t)$. EN TAL SISTEMA: $g = d\lambda^2 + A(\lambda, t)^2 dt^2$

ADemás, TENEMOS $\Gamma_{\lambda\lambda}^i = 0$ EN TAL SISTEMA.



TALES RESULTOS SIGUE EN CONSIDERANDO QUE LAS CURVAS $t=ct$ SON geodésicas y escribiendo LAS ECUACIONES PARA geodésicas en coordenadas:

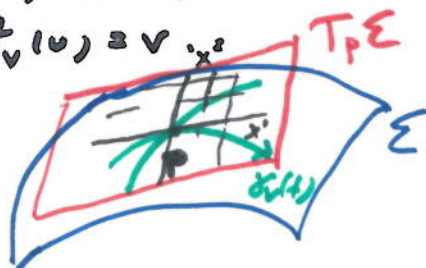
$$0 = \lambda'' + \Gamma_{tt}^{\lambda} t'^2 + 2\Gamma_{t\lambda}^{\lambda} t'\lambda' + \Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} (\lambda')^2 = \Gamma_{\lambda}^{\lambda}$$

CUANDO c es mismo es una geodésica, TENEMOS EN ADICIÓN

que: $A(0, t) = 1, \quad \partial_{\lambda} A(0, t) = 0, \quad T_{ij}^k(0, t) = 0,$ y

$$K(\lambda, t) \stackrel{(*)}{=} - \frac{\partial_{\lambda}^2 A}{A} \quad \text{para la curvatura Gaussiana.}$$

* PARA COORDENADAS NORMALES ALREDEDOR DE $p \in \Sigma$,
 TOMAMOS UNA BASE ORTONORMAL PARA $T_p \Sigma$, e_1, e_2 y
 ENVIAMOS $y = x^1 e_1 + x^2 e_2 = (x^1, x^2) \in T_p \Sigma$ A $\gamma_v(t)$ DONDE
 $\gamma_v(t)$ ES LA GEODESICA CON $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.



EN TAL SISTEMA DE COORDENADAS, TENEMOS:
 $g_{ij}(0,0) = g_{ij}$, $k(0,0) = 0$ (ENTONCES $T_{ij}^k(0,0) = 0$)
 QUE ES ÚTIL EN COMPUTACIONES.

SIMILARMENTE, COORDENADAS GEODÉSICAS POLARES SON

$(r, \theta) \mapsto (r, \theta, r\theta) = (x^1, x^2) \in T_p \Sigma$, CON (x^1, x^2) COORDS NORMALES.
 LAS CURVAS $r = \text{const.}$ SON CÍRCULOS GEODÉSICOS ($q \in \Sigma : \text{dist}_\Sigma(q, p) = r$),
 Y LAS COORDENADAS SON COORDENADAS DE FERMI BASADO POR UN CÍRCULO
 GEODÉSICO. EN PARTICULAR $g = dr^2 + A(r, \theta)^2 d\theta^2$.

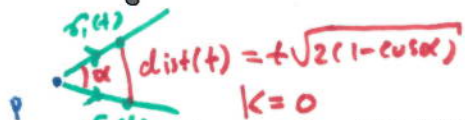
* EN TAL COORDENADAS SIGUEN LAS SIGUIENTES INTERPRETACIONES
 DE $K(p)$ EN TÉRMINOS DE LA GEOMETRÍA INTRÍNSECA:

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - l(C_r)}{r^3} \cdot \frac{3}{\pi} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - A(D_r)}{r^4} \cdot \frac{12}{\pi}$$

donde $l(C_r)$ es la longitud de un círculo geodésico de radio
 r alrededor de p , y $A(D_r)$ es el área acotado por C_r .

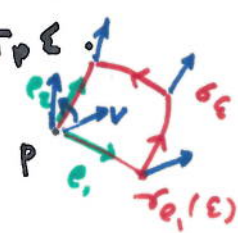
+ Expansión entre geodésicas: SEA $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ geodésicas de
 vel. 1, con $\gamma_i(0) = p$ y $\alpha = \angle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0))$, ENTONCES

$$\text{dist}_\Sigma^2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = 2t^2(1 - \cos \alpha) = \frac{2}{3} t^4 \sin^2 \alpha K(p) + o(t^4)$$



+ HOLONOMÍA DE TRANSPORTE PARALELO:

SEA γ UN CURVA CERRADA CON $\gamma(0) = p$ y $v \in T_p \Sigma$.
 EN TRANSPORTANDO v PARALELAMENTE ALREDEDOR
 DE γ , v REGRESA POSICIONALMENTE ROTADO POR UN
 ÁNGULO $\theta(\gamma)$. DEFINA $A(\gamma)$ EL ÁREA ENCERRADO
 POR γ , ENTONCES $K(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\theta(\sigma_\epsilon)}{A(\sigma_\epsilon)}$



DONDE σ_ϵ TIENE DOS LADOS
 PARAMETRIZADOS POR GEODÉSICAS
 ORTONORMALES.

(13)
* SE PUEDE USAR UNA TRIANGULACIÓN DE Σ y la caracterización de K por holonomía PARA MOSTRAR LA TEOREMA DE GAUSS-BONNET:

$$\int_{\Sigma} K dA = 2\pi \chi(\Sigma) \quad (\text{CUANDO } \Sigma \text{ NO TIENE FRONTERA})$$

DONDE $\chi(\Sigma)$ es el característico de EULER de Σ (EN PARTICULAR NO DEPENDE DE LA TOPOLOGÍA DE Σ) dado por $\chi(\Sigma) = v - e + f$ donde v son el número de VERTICES, e el número de BORDES y f el número de CARAS EN ALGUNA TRIANGULACIÓN DE Σ .

REFERENCIAS:

- de CARMO - CURVES AND SURFACES
- KLINGENBERG - A COURSE IN DIFFERENTIAL GEOMETRY
- CHEN, CESARI (editors) - GLOBAL DIFFERENTIAL GEOMETRY (vol. 27 M.A.A.)
- A. CHENCINER - NOTES (2005) "Géométrie différentielle" online @ perso.imcce.fr/alain-chenciner/polyg.html