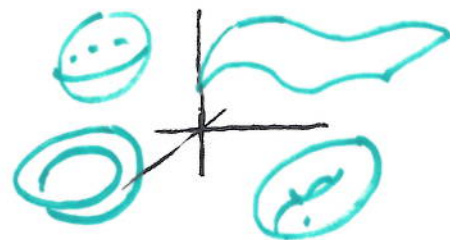


SUPERFICIES

U

UNA SUPERFICIE EN ESPACIO ENTENDEMOS COMO UN SUBCONJUNTO $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ DADO LOCALMENTE POR PARAMETRIZACIONES EN DOS VARIABLES, O CARTAS:



UNA CARTA O PARAM. LOCAL DE UN REGIÓN $V \subset \mathbb{E}^3$ ES UNA APLICACIÓN $\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{\varphi} V$ QUE ES BIYECTIVA, DIFERENCIABLE, Y REGULAR ($d\varphi$ inyectiva).

SE PUEDE PENSAR DE UNA SUPERFICIE COMO CONSISTENTE EN VARIAS CARTAS 'PEGAOS JUNTOS EN UNA MANERA SUAVE':



LLAMAMOS DOS CARTAS COMPATIBLES SI LA FUNCIÓN DE TRANSICIÓN:

$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^2$ es diferenciable.

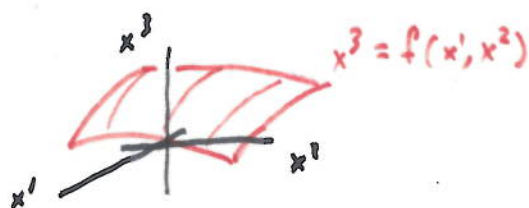
ENTONCES POR UNA SUPERFICIE $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$, SIGNIFICAMOS QUE PARA CADA $p \in \Sigma$, $\exists$ UNA CARTA $U \hookrightarrow V = \Sigma \cap \tilde{V} \ni p$ CON $\tilde{V} \subset \mathbb{E}^3$.

ADemás TODOS TALES CARTAS DEBERÍAN SER COMPATIBLES. UNA COLECCIÓN DE TALES CARTAS QUE CUBRE Σ LLAMAMOS UN ATLAS de Σ .



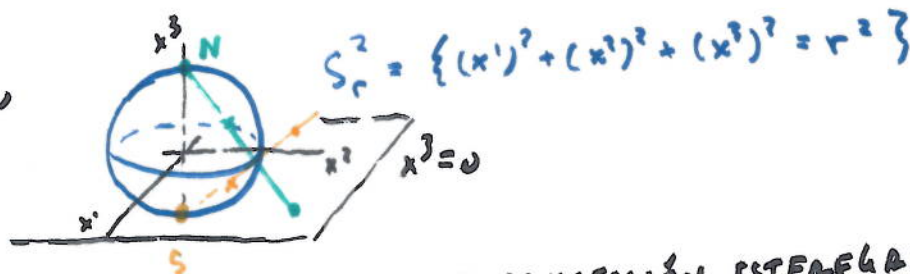
Ejemplos:

1) GRÁFICAS,



* CADA SUPERFICIE ES LOCALMENTE UNA GRÁFICA *

2) Esfera,



TENEMOS UN ATLAS CON DOS CARTAS DE PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA AL PLANO $\{x^3 = 0\}$ DESDE 'POLO NORTE' $N = (0, 0, r)$ Y 'POLO SUR' $S = (0, 0, -r)$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi_N} S_r^2 \setminus N$$

$$(x', x'') \mapsto \left(\frac{2r^2 x'}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2}, \frac{2r^2 x''}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2}, \frac{r((x')^2 + (x'')^2 - r^2)}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2} \right)$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi_S} S_r^2 \setminus S$$

$$(x', x'') \mapsto \left(\frac{2r^2 x'}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2}, \frac{2r^2 x''}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2}, \frac{r(r^2 - (x')^2 - (x'')^2)}{(x')^2 + (x'')^2 + r^2} \right)$$

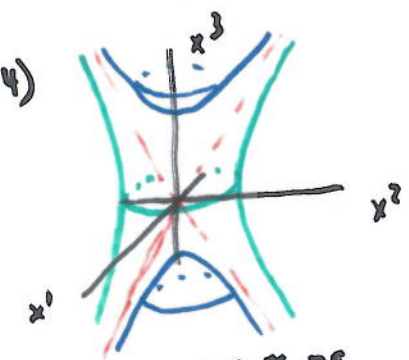
QUE SON COMPATIBLES, YA QUE $\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (x', x'') \mapsto \frac{r^2 (x', x'')}{(x')^2 + (x'')^2}$.

3) GENERAR UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN POR RODEANDO UNA CURVA PLANAR, C , ALREDEDOR UNA LINEA, L (EJE), CONTENIDO EN EL MISMO PLANO QUE C . EN COORD. CART. CON $L = \{(0, 0, x^3)\}$ y C param. por $(x^1(t), 0, x^2(t))$



tenemos su param: $(x^1(t)\cos\theta, x^1(t)\sin\theta, x^2(t))$, $t \in \mathbb{R}, \theta \in S^1$.

POR EJEMPLO, EL TORO DE REV. OBTENEMOS POR RODEANDO UN CÍRCULO ALREDEDOR UN EJE.



CONJUNTOS NIVELES DE $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2$

TENEMOS SUPERFICIES IMPLÍCITAS, DEFINIDOS COMO UN CONJUNTO NIVEL DE UN FUNCIÓN REGULAR
 $E := f^{-1}(c.h.)$ CON $f: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $df_p \neq 0 \forall p \in E$.
 POR EL TEOREMA DE FUNCIONES IMPLÍCITA, TALES CONJUNTOS NIVELES ADMITEN PARAMS LOCAL Y COMPATIBLES (ES DECIR TIENEN UN ATLAS).

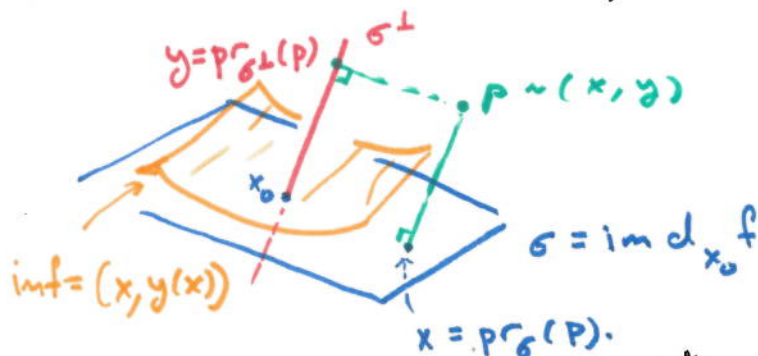
LINEARIZACIÓN $\rightarrow$ forma normal local de aplicaciones:

1) TEOREMA FUNCIONES INVERSA. PARA $f: E^n \xrightarrow{\text{diff.}} E^m$ CON $df_{x_0} f$ INVERTIBLE, EXISTE UN BARRIO $U \ni x_0$ PARA QUE
 $u \xrightarrow{f|_U} f(u)$ ES BIYECCION Y ADemás f^{-1} ES DIFERENCIABLE. (Escribimos IVT para este teorema)

2) inmersión: $E^k \xrightarrow{f} E^{k+n}$ con $d_{x_0} f$ inyectiva. ENTONCES (3)

$\exists$ BARRIO $U \ni x_0$ y coordenadas locales t.q.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$



* la demostración sigue de IVT. Sea $\sigma = \text{im } d_{x_0} f \cong E^k$ lo que determina una división $E^{k+n} = \sigma \oplus \sigma^\perp \cong E^k \times E^n \ni (x, y)$.

Por REGLA DE CADENA, y IVT el primer componente de $S \circ f$ es localmente invertible. ENTONCES $\exists U$ t.q.

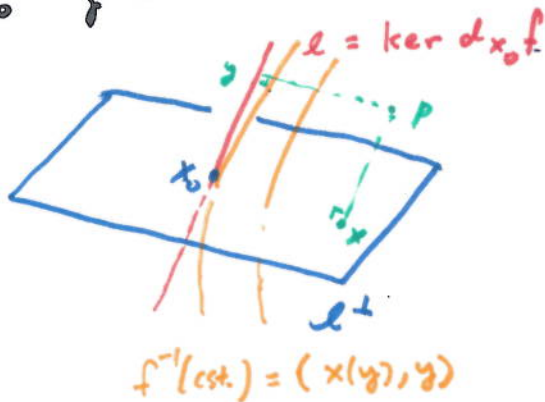
$$\begin{array}{ccc} x_0 \in U & \xrightarrow{f} & E^{k+n} \\ f_1 \downarrow & & \downarrow s \\ E^k & \xrightarrow{\hat{f}} & E^k \times E^n \end{array}$$

con $\hat{f}(x) = (x, y(x))$ algún $y: E^k \rightarrow E^n$ diff. OBTENEMOS LA FORMA ANTERIOR con $\hat{s} = t \circ s$ en lugar de s , donde $t(x, y) = (x, y - y(x))$.

3) submersión: $E^{k+n} \xrightarrow{f} E^k$ con $d_{x_0} f$ suryectiva. ENTONCES

$\exists$ BARRIO $U \ni x_0$ y coordenadas locales t.q.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^k \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$



* la demostración con IVT es similar a (2), usando la descomposición $E^{k+n} = l \oplus l^\perp \cong E^n \times E^k$.

SE CONSIDERA

$$\begin{array}{ccc} E^{k+n} & \xrightarrow{f} & E^k \\ s \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ E^k \times E^n & & \end{array} \quad \text{y verificar la aplicación}$$

$$(x, y) \longmapsto (\bar{f}(x, y), y)$$

es localmente invertible. *

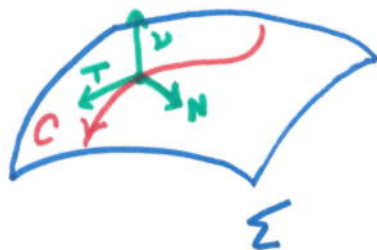
* OTRA FORMA QUE CONDUCE A LA TEOREMA

DE FUNCIONES IMPLÍCITAS EN CONSIDERANDO LAS CONJUNTOS NIVEL DE f al f .

CURVAS EN SUPERFICIES

1

CONSIDERAMOS CURVAS $C \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^3$. TAL CURVAS TIENEN UNA NATURAL MARCA MOVIL ADAPTADA AL SUPERFICIE:



- $T(p)$ es tangente a C dirigida conforme a la orientación de C
- $v(p)$ es normal a Σ
- $N(p) = T(p) \times v(p)$.

TENEMOS LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES: $T' = \omega \times T$, $N' = \omega \times N$, $v' = \omega \times v$ con $\omega = \tau_n T - \kappa_n N + \kappa_g v$. LAS FUNCIONES κ_n , κ_g SON LA ACCELERACIÓN NORMAL Y TANGENTE DE LA CURVA. TAMBIÉN LLAMAMOS $\kappa_g = \kappa_{geo}$ la curvatura geodésica de $C \subset \Sigma$. OBSERVA QUE EN UNA PARAM. CON RESPECTO A LONG. DEL ARCO, $C(s)$,

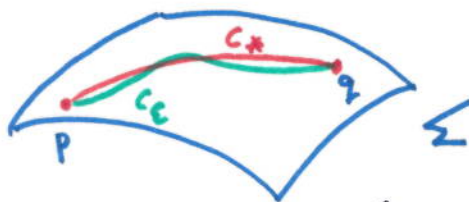
$$C'' = \kappa_n v + \kappa_{geo} N.$$

* LA ACCELERACIÓN QUE SE PUEDE MEDIR EN LA SUPERFICIE ES κ_{geo} . CURVAS CON $\kappa_{geo} \equiv 0$ SON CANDIDATOS PARA generalizar 'líneas' en Σ *

LLAMAMOS geodésicas curvas en Σ ~~curvas~~ con $\kappa_{geo} \equiv 0$.

Geodésicas de Σ son extremales de la longitud restringido a Σ (CURVAS QUE MINIMIZAN LONGITUD POR Σ ENTRE DOS PUNTOS DON DEBÍ).

- 1) FIJAMOS DOS PUNTOS $p, q \in \Sigma$ y CONSIDERAMOS $C \mapsto \int_0^1 |\dot{C}| dt = l(C)$ donde $C(0)=p, C(1)=q$ y $C \subset \Sigma$.



- 2) SUPONE QUE $C_*: p \rightarrow q$ es una curva en Σ QUE EXTREMIZA l . OBSERVA QUE $l(C_*)$ NO DEPENDE DE LA PARAM DE C_* , ENTONCES PODEMOS SUPONER QUE $|\dot{C}_*| = 1$.

SEA C_ϵ UNA VARIACIÓN DE C_* , y pon $\eta := \frac{d}{ds} \Big|_0 C_\epsilon \in T\Sigma|_{C_*}$

3) CALCULAMOS: $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_0 \ell(c_\epsilon) = \int_0^1 \lambda \ddot{c}_k \cdot \dot{\gamma} dt$ donde $\lambda \neq 0$ es constante. ^(*)

INTEGRANDO POR PARTES Y TOMANDO EN CUENTA $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ ($c_\epsilon(0) = p$ y $c_\epsilon(1) = q$ fijados)

TENEMOS: $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_0 \ell(c_\epsilon) = \lambda \int_0^1 \ddot{c}_k \cdot \dot{\gamma} dt$

AHORA SI $K_{\gamma(t)}(c_k(t)) \neq 0$ ALGÚN t , PODEMOS USAR UNA FUNCIÓN DE GOLPE PARA OBTENER UNA VARIACIÓN CON $\frac{d}{d\epsilon} \Big|_0 \ell(c_\epsilon) \neq 0$.

* MÁS ÚTIL EN COMPUTACIONES, UNO PUEDE MOSTRAR QUE GEODESICAS SON EXTREMALIS DE $c \mapsto \int |\dot{c}(t)|^2 dt = E(c)$. *

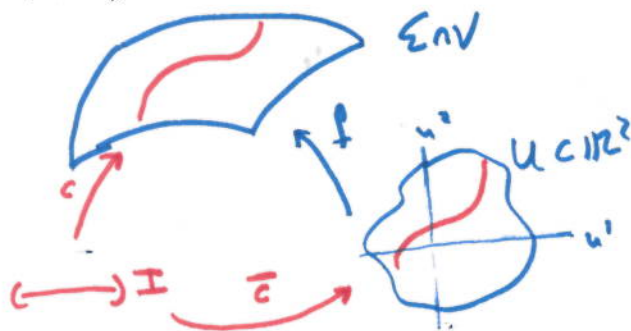
DERIVAMOS LA CONDICIÓN DE SER GEODESICA EN COORDENADAS.

SEA $(u^1, u^2) \in U \mapsto f(u^1, u^2) \in E \cap V$ coordenadas locales.

UNA CURVA PARAMETRIZADA EN $E \cap V$ $c: I \rightarrow E \cap V$ PODEMOS EXPRESAR EN TAL MODO $\tilde{c} = f^{-1} \circ c: I \rightarrow U$, $t \mapsto (u^1(t), u^2(t))$.

COMO COMENTAREMOS, LA CONDICIÓN DE SER GEODESICA ES DE SER EXTREMAL DE $c \mapsto E(c) = \int |\dot{c}|^2$.

DEADE $\dot{c} = \partial_{u^1} f \dot{u}^1 + \partial_{u^2} f \dot{u}^2$, ESTE CONDICIÓN EN COORDENADAS ES EXTREMALIS:



$(u^1(t), u^2(t)) \mapsto \frac{1}{2} \int E(\dot{u}^1)^2 + 2F \dot{u}^1 \dot{u}^2 + G(\dot{u}^2)^2 dt$ (*)

donde $E(u) = \partial_{u^1} f \cdot \partial_{u^1} f|_u$, $F(u) = \partial_{u^1} f \cdot \partial_{u^2} f|_u$, $G(u) = \partial_{u^2} f \cdot \partial_{u^2} f|_u$.

* NOTACIÓN: $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$. PONEMOS $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$.

OBSERVA QUE E TIENE UNA 'MÉTRICA' INDUCIDA POR RESTRICCIÓN DE PRODUCTO INTERIOR (PRODUCTO DE 'DOT') DE E^3 , ES DECIR FORMABILIDADES, SIMÉTRICA Y POSITIVA DEFINIDA EN CADA ESPACIO TANGENTE:

$(v_1, v_2) \in T_p E \times T_p E \xrightarrow{I_p} v_1 \cdot v_2 \in \mathbb{R}$.

LLAMAMOS $I: T E \times T E \rightarrow \mathbb{R}$ LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL DE E .

LA MÉTRICA SE EXPRESA EN COORDENADAS POR 'RETORNAR' I POR f :

$f^* I(u_1, u_2) := I(df u_1, df u_2) = df(u_1) \cdot df(u_2)$.

Regresando a (*), las geodésicas satisfacen las ecuaciones DE EULER-LAGRANGE asociada a (*), que son:

$$\frac{d}{dt} L_u(u, \dot{u}) = L_u(u, \dot{u}) \quad \text{con} \quad L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \dot{u} \cdot g \dot{u}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

o $\frac{d}{dt} g \dot{u} = \frac{1}{2} \dot{u} \cdot g_u \dot{u}$, con un poco de ALGEBRA conduce a:

$$g \ddot{u} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} g_{11,1} (\dot{u}')^2 + g_{11,2} \dot{u}' \dot{u}^2 + (g_{12,2} - \frac{1}{2} g_{22,1}) (\dot{u}')^2 \\ (g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2}) (\dot{u}')^2 + g_{22,1} \dot{u}' \dot{u}^2 + \frac{1}{2} g_{22,2} (\dot{u}')^2 \end{pmatrix} = 0$$

(con $g_{ij,k} := \partial_k g_{ij}$). EN PARTICULAR, ES CANONICA EN LAS VELOCIDADES. INTRODUCIMOS LA NOTACIÓN τ_{ijk} para los COEFICIENTES:

$$g \ddot{u} + \begin{pmatrix} \tau_{111} (\dot{u}')^2 + 2\tau_{112} \dot{u}' \dot{u}^2 + \tau_{122} (\dot{u}')^2 \\ \tau_{211} (\dot{u}')^2 + 2\tau_{212} \dot{u}' \dot{u}^2 + \tau_{222} (\dot{u}')^2 \end{pmatrix} = 0$$

APLICANDO g^{-1} CONDUCE A LA SISTEMA DE EDS:

$$\ddot{u}^i + \Gamma_{11}^i (\dot{u}')^2 + 2\Gamma_{12}^i \dot{u}' \dot{u}^2 + \Gamma_{22}^i (\dot{u}')^2 = 0 \quad i=1,2$$

DONDE $\begin{pmatrix} \Gamma_{jk}^1 \\ \Gamma_{jk}^2 \end{pmatrix} := g^{-1} \begin{pmatrix} \tau_{1jk} \\ \tau_{2jk} \end{pmatrix}$ son los simbolos de Christoffel.
 $j,k \in \{1,2\}$

PROPIEDADES DE Σ DERIVADO DE I llamamos propiedades INTRINSICAS DE Σ , YA QUE SOLO REQUIERE CONOCER como MEDIR DISTANCIAS/ANGULOS EN Σ (en decir saber los coeficientes g_{ij} en algùn CARTA).

CUALQUIER PROPIEDADES INTRINSICAS SERÁN PRESERVADAS BAJO 'DOBLANDOS' DE LA SUPERFICIE, O ISOMETRIAS DE LA SUPERFICIE:

$\varphi: E^3 \rightarrow E^3$ t.q. $\varphi(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$ y φ preserva dist y angulos en Σ : $d_{\tilde{\Sigma}}(p,q) = d_{\Sigma}(\varphi(p), \varphi(q))$
 p.ej. $\varphi^* \tilde{I} = I$.

GEOMETRÍA EXTRÍNSICA

(4)

CON PROPIEDADES EXTRÍNSICAS DE $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ referimos a tales propiedades preservadas por aplicaciones isométricas de $\mathbb{E}^3$. EN PARTICULAR PENSAMOS DE CANTIDADES MEDIBLES SOLO CON TOMAR EN CUENTA COMO $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ está encajado en espacio.

PARA MEDIR COMO Σ se encuentra contenido en un PLANO ALREDEDOR DE $P \in \Sigma$, PODEMOS ELEGIR Σ POR PLANOS PASANDO POR P , Y CONTENIENDO $\nu(P)$ (NORMAL).

CADA REBANADA DE Σ por tal PLANO RESULTE EN UNA CURVA PLANA EN Σ Y PASANDO POR P .

PODEMOS ENVIAR CADA VECTOR UNITARIO $T \in T_P \Sigma \mapsto \hat{\Pi}_P(T, T) := K_n \in \mathbb{R}$

a la aceleración NORMAL DE LA CURVA $\langle \nu(P), T(P) \rangle \cap \Sigma = C_T$

Sea $c(n)$ parametr. por longitud de C_T con $c(0) = P, c'(0) = T$.

ENTONCES $\hat{\Pi}_P(c'(0), c'(0)) = \nu(0) \cdot c''(0)$ con $\nu(n) := \nu(c(n))$.

DE $\nu(n) \cdot c'(n) = 0 \Rightarrow \nu'(n) \cdot c'(n) = -\nu(n) \cdot c''(n)$, ENTONCES

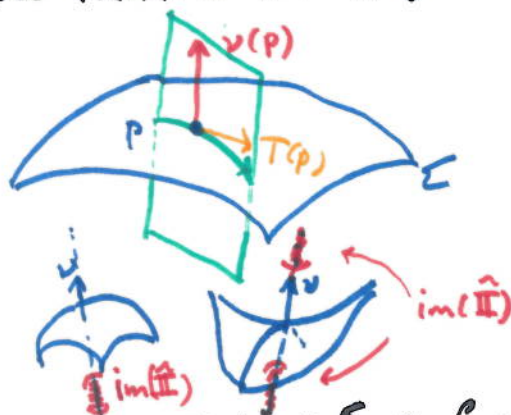
$\hat{\Pi}_P(c'(0), c'(0)) = -\nu'(0) \cdot c'(0)$. PODEMOS EXTENDER $\hat{\Pi}$

a UNA FORMA BILINEAL $T_P \Sigma \times T_P \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ POR

$\Pi_P(v_1, v_2) := -d_P \nu(v_1) \cdot v_2$, la segunda forma fundamental de Σ .

~~Definición~~ De $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$, $d\nu_P: T_P \Sigma \rightarrow T_{\nu(P)} S^2 = \nu(P)^\perp \cong T_P \Sigma$, llamamos $L_P := -d_P \nu: T_P \Sigma \rightarrow$ la aplicación de WEINGARTEN, ó OPERADOR DE FORMA.

- LA FORMA Π es simétrica $\Rightarrow$ AUTOVALORES DE L son REAL
- CON AUTOVECTORES ORTONORMALES.
- ESTOS AUTOVALORES / VECTORES SON LOS EXTREMOS DE $\hat{\Pi}$.



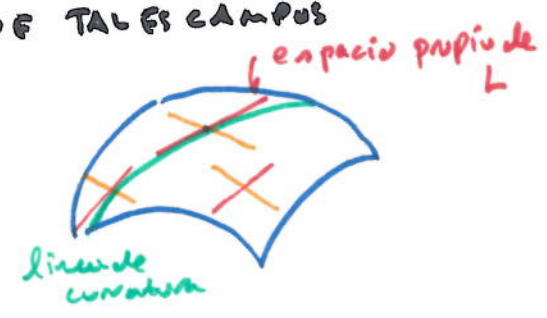
LOS AUTOVALORES, K_1, K_2 DEL OPERADOR DE FORMAS L LLAMAMOS LAS CURVATURAS PRINCIPALES de Σ .

* K_i son preservados por aplicación isométrica del espacio AMBIENTE.
NO SON NECESARIAMENTE PRESERVADOS AL DOBLAR LA SUPERFICIE *



DOBLANDO UNA HOJA DE PAPEL PRESERVA LA GEOMETRÍA INTRÍNSECA, PERO PUEDE CAMBIAR LOS K_i 's.

TAMBIÉN ASOCIADO A LA FORMA II, tenemos en los puntos con $K_1 \neq K_2$ dos DIRECCIONES PRINCIPALES: las líneas representadas por los espacios propios de L . (Puntos con $K_1(p) = K_2(p)$ son llamados PUNTOS UMBILICOS) ENTONCES TENEMOS DOS CAMPOS LINEAL SOBRE $\Sigma \setminus \{\text{PUNTOS UMBILICOS}\}$. CURVAS INTEGRALES DE TALES CAMPOS LINEALES SON LÍNEAS DE CURVATURA DE Σ .



* isometría ambiente de E^3 preservan líneas de curvatura. Si existe $\varphi: \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ pro $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ entonces φ envía las líneas de curvatura por p a las por $\tilde{p}$.

* se puede usar las líneas de curvatura para definir una BUENA SISTEMA DE COORDENADAS (EN QUE f^*I, f^*II son DIAGONAL)

Similarmente, direcciones en el KERNEL DE II , generan campos de líneas sobre $\Sigma \setminus \{p: K_1(p)K_2(p) > 0\}$. TALES DIRECCIONES LLAMAS LAS DIRECCIONES ASINTÓTICAS, Y SUS CURVAS INTEGRALES LAS LÍNEAS ASINTÓTICAS DE Σ . Si Σ CONTIENE UNA línea, toda línea es una línea asintótica de Σ .

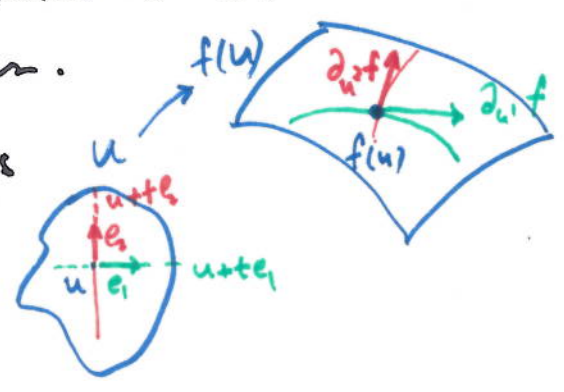
— 0 —
AHORA DETERMINAMOS EXPRESIONES EN COORDENADAS LOCALES PARA ESTOS ASPECTOS DE LA GEOMETRÍA EXTRÍNSECA DE Σ .

Sea $(u, v) \xrightarrow{f} \Sigma$ coords locales.

UN BASE COORDENADA PARA ESPACIOS TANGENTES OBTENEMOS POR TOMANDO IMÁGENES DE BASE ESTÁNDAR $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$,

$$d_u f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \partial_u f|_u, \quad d_u f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \partial_v f|_u$$

son UN BASE PARA $T_{f(u)}\Sigma$.



ENTONCES, PODEMOS EXPRESAR EL NORMAL $\nu: \Sigma \rightarrow S^1$ en coordenadas (6)

$$\text{por } \nu \circ f(u) =: \nu(u) = \frac{\partial_u f \times \partial_v f}{|\partial_u f \times \partial_v f|} \quad (*)$$

LA FORMA $f^* \Pi$ es bilinear, entonces determinamos sus coeficientes en el base estandard e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$.

PRIMER OBSERVA QUE $d_{f(u)} \nu (d_u f(e_j)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \nu(f(u+te_j)) = \partial_{u_j} \nu$.

$$\begin{aligned} \text{ENTONCES, } (f^* \Pi)_u(e_j, e_k) &= -d_{f(u)} \nu (d_u f(e_j)) \cdot d_u f(e_k) \\ &= -\partial_{u_j} \nu \cdot \partial_u f =: h_{jk} \end{aligned}$$

PARA EVITAR DIFERENCIACIÓN DE (*), PODEMOS USAR REGLA DE PRODUCTO a obtener $\partial_{u_j} (\nu \cdot \partial_u f) = \partial_{u_j} \nu \cdot \partial_u f + \nu \cdot \partial_{u_j} \partial_u f = -h_{jk} + \nu \cdot \partial_{u_j} \partial_u f$ y OBSERVA QUE $\nu \cdot \partial_u f \equiv 0$, ya que $\partial_u f$ es tangente a Σ .

entonces: (*) $h_{jk} = \nu \cdot \partial_{u_j} \partial_u f$, y TENEMOS la expresión

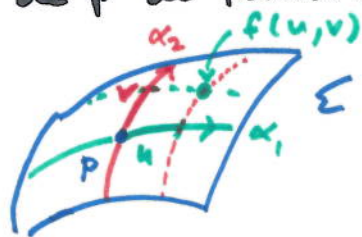
$$(f^* \Pi)_u((u^1, u^2)(u^1, u^2)) = h_{11}(u^1)^2 + 2h_{12}u^1u^2 + h_{22}(u^2)^2$$

O BIEN LA FORMA Π tiene representación matricial en coordenadas por $h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}$. TAMBIÉN ESCRIBES $L = h_{11}$, $M = h_{12}$, $N = h_{22}$ para sus componentes.

COORDENADAS CON LINEAS DE CURVATURA: Sea $p \in \Sigma \setminus \{\text{puntos umbilicos}\}$. LA CONDICIÓN $\kappa_1 \neq \kappa_2$ es satisfecho, entonces $\exists$ barrio de p de puntos no umb. DE EXISTENCIA LOCAL DE SOLUCIONES A EDU'S, TENEMOS

líneas de curvatura α_1, α_2 pasando por p .

CONSIDERA PARAMETRIZACIONES $\alpha_1(u), \alpha_2(v)$ en $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ de tal línea. Parametrizando



UN BARRIO DE p por $(u, v) \mapsto f(u, v) =$ intersección de líneas de curv.

~~pasando por~~ Debido a $\partial_u f, \partial_v f$ son tangentes a líneas de curv., tenemos las expresiones:

$$g = f^* I = A(du)^2 + B(dv)^2, \quad h = f^* \Pi = \kappa_1 A(du)^2 + \kappa_2 B(dv)^2$$

$$\text{con } A(u, v), B(u, v) > 0$$

LA CURVATURA DE GAUSS es $K := K_1 K_2$,
 LA CURVATURA MEDIA es $H := \frac{K_1 + K_2}{2}$. * PODEMOS TOMARLOS
 COMO INVARIANTES EN LUGAR
 DE K_1, K_2 . *

DEBIDO A QUE K_i PUEDEN CAMBIAR BAJO DOBLANDO, ES SORPRENIENTE
 QUE SE PUEDE EXPRESAR K solo en terminos de los coeficientes
 g_{ij} y sus derivadas - es decir K es un INVARIANTE INTRINSICA,
 QUE NO CAMBIA BAJO DOBLANDO (debido a GAUSS - Teorema Egregium).
 EN CUANTO DESARROLLAMOS MÁS MAQUINARIA, MOSTRAMOS ESTE RESULTA
 (PARA EVITAR UN POCO FORMULAS COMPLICADAS).

ALGUNOS RESULTADOS:

1) Existe coordenadas cartesianas alrededor $p \in \Sigma$ para que
 $\Sigma \cap U$ esta parametrizada por:

$$(u, v) \mapsto (u, v, K_1(p)u^2 + K_2(p)v^2) + \mathcal{O}_3(u, v).$$

* a diferencia con las curvas, las terminos de ALTA ORDEN NO
 DEPENDE solo de $K_1', K_2'', \dots$ por p . *

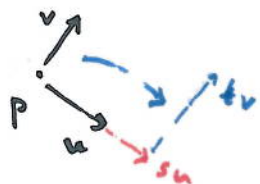
2) Si un barrio $\Sigma \cap U$ CONSISTE SOLO DE PUNTOS UMILICOS
 entonces $\exists p_0 \in \Sigma$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q. $\Sigma \cap U = S_r^2(p_0) \cap U$.

3) UNA FAMILIA DE SUPERFICIES ORTOGONAL DEPENDE POR 3-parametros
 INTERSECTAN A LO LARGO LINEAS DE CURVATURA (DUPIN).

CONEXIONES

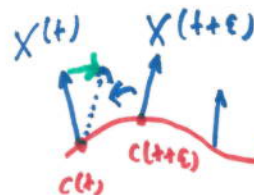
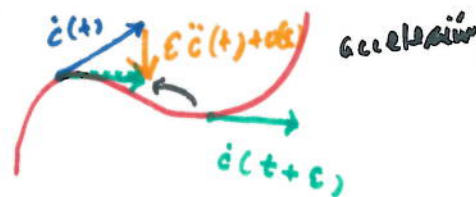
①

EN CALCULANDO DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE APLICACIONES ENTRE ESPACIOS ABELIANOS/VECTORIALES, TOMAMOS VENTAJA DE LA IDENTIFICACION NATURAL ENTRE VECTORES TANGENTES BASADOS POR PUNTOS DIFERENTES.



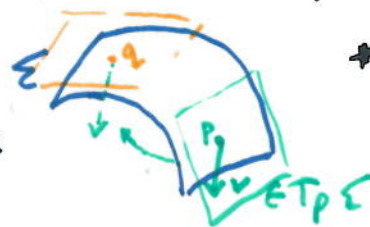
$$d_p^2 f(u, v) = \frac{d^2}{dt ds} \bigg|_{t=s=0} f(p + tu + tv)$$

Hessiano



campo
vectorial
a lo largo
una curva

$$d_{c(t)} X(c(t)) = \nabla_{c'(t)} X(t) := \frac{d}{dt} \bigg|_{t=c(t)} X(t)$$



* transporte
paralelo de
 E^3 , típicamente
no envía
vectores tang.
a vectores tang.

LA EXTENSION DE TALES OPERACIONES A $\Sigma \subset E^3$ EN UNA MANERA INTRINSECA, VA A REQUIRIR UNA NOCION INTRINSECA DE "transporte paralelo" de vectores tangentes a Σ , o bien algún procedo para identificar sus espacios tangentes POR PUNTOS DIFERENTES.

* la noción de geodésica es intrínseca, o bien que el componente tangente a Σ de la aceleración (determinado usando el transporte ambiente de E^3) es cero ($\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$). En general este filarotia de que proyección al componente tangente de derivadas tomado con la estr. AMBIENTE estarían derivadas intrínsecas (las cambian en el objeto medible por un cambio ambiente) en Σ , no las cambian en el proyección al tangente).

* tan pronto como uno PUEDE TOMAR DERIVADAS DE campos vectoriales a lo largo de curvas, PODEMOS DEFINIR UN TRANSPORTE paralelo: identificamos $X(t)$ y $X(\tilde{t})$ cuando la derivada $X'(s)$, $s \in [t, \tilde{t}]$ es cero.

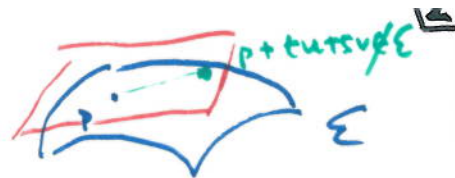
Para apreciar como usamos un 'transporte paralelo' a lo largo curvas en una superficie, CONSIDERAMOS como uno PUEDE INTENTAR DEFINIR el Hessiano de un función suave $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

* OBSERVA QUE A PRIORI f solo esta definido por puntos en Σ *

* POR EL HESSIANO queriamos una APLICACION BILINEAL Y SIMETRICA

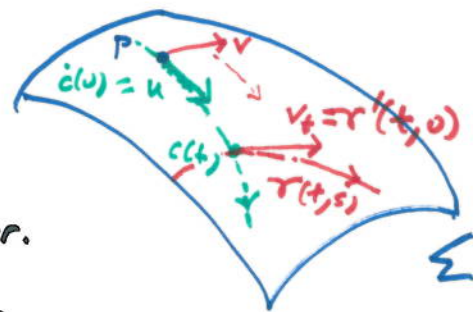
$$\text{Hess}_p(f) : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

* para $u, v \in T_p \Sigma$, típicamente $f(p+tu+sv)$ no está definido, debido a $p+tu+sv \notin \Sigma$



* si extendemos u, v a campos vectoriales U, V tangente a Σ y con flujos ϕ^t, ψ^s la derivada

$\frac{d^2}{dt ds} \Big|_{t=s=0} f(\psi^s \circ \phi^t(p))$ típicamente no es simétrica en u, v , y puede depender de las extensiones U, V .



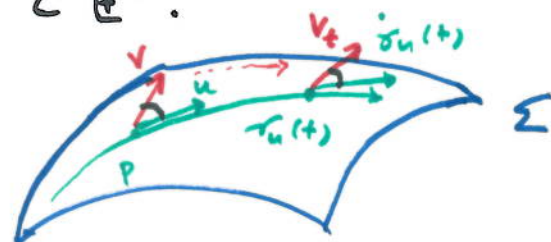
* PENSANDO DE vectores tangentes como clases de curvas, sea $c(t)$ una curva en Σ con $\dot{c}(0) = u$. TOMAMOS v_t para el transporte par.

de $v \in T_{c(0)} \Sigma$ a $T_{c(t)} \Sigma$ a lo largo de c , sea $\alpha \mapsto r(t, \alpha)$, una curva en Σ con $\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} r(t, \alpha) = v_t$. UN CANDIDATO PARA

el HESSIANO entonces será $\text{Hess}_p(f)(u, v) := \frac{d^2}{dt d\alpha} \Big|_{t=\alpha=0} f(r(t, \alpha))$.

Delineamos tres definiciones / interpretaciones de la conexión de Levi-Civita para $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$.

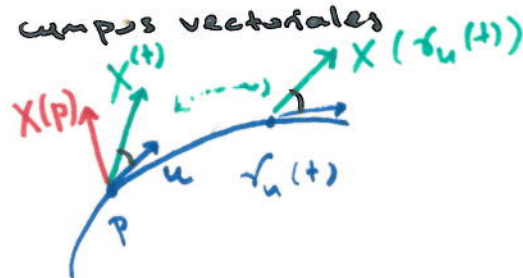
1) EL TRANSPORTE PARALELO DE $v \in T_p \Sigma$ a lo largo una geodésica, $\gamma_u(t)$, en la dirección $u \in T_p \Sigma$ ($\gamma_u(0) = p, \dot{\gamma}_u(0) = u$) está determinado por la condición: $\nabla_{\dot{\gamma}_u(t)} v_t = 0$.



Esto nos permite tomar derivadas de campos vectoriales X sobre Σ en direcciones $u \in T_p \Sigma$:

$$\nabla_u X := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X^{(t)} \in T_p \Sigma$$

DONDE EL TRANSPORTE PARALELO DE $X^{(t)} \in T_{\gamma_u(t)} \Sigma$ a lo largo $\gamma_u(t)$ es $X^{(t_u(t))}$.



2) TAMBIÉN PODEMOS DEFINIR LA DERIVADA COVARIANTE DE un campo vectorial X sobre Σ en una dirección $u \in T_p \Sigma$ por TOMANDO VENTAJA DE LA ESTRUCTURA AMBIENTE ($\Sigma \subset \mathbb{E}^3$):

$$\nabla_u X := \text{pr} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(c(t)) \in T_p \Sigma, \text{ donde } c(t) \text{ es una curva en } \Sigma \text{ con } c(0) = p, \dot{c}(0) = u \text{ y pr es la proyección al } T_p \Sigma.$$

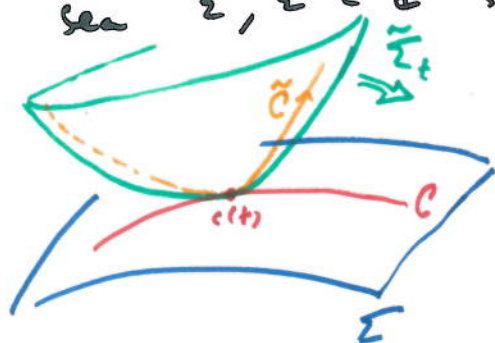
LA DERIVADA COVARIANTE NOS PERMITE DEFINIR UN TRANSPORTE PARALELO DE vectores tangentes a lo largo de curvas. Sea $c(t) \in \Sigma$ una curva y $v \in T_{c(t)}\Sigma$.

EL TRANSPORTE PARALELO DE v a lo largo de c es el campo vectorial $v_t \in T_{c(t)}\Sigma$ sobre c que satisface:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} v_t = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = v.$$

3) TAMBIÉN, UNO PUEDE DEFINIR UN TRANSPORTE PARALELO A LO LARGO DE CURVAS $c \in \Sigma$ MEDIANTE UN PROCESO DE RODANDO.

Sea $\Sigma, \tilde{\Sigma} \subset \mathbb{E}^3$ SUPERFICIES y $C \subset \Sigma$ una curva.

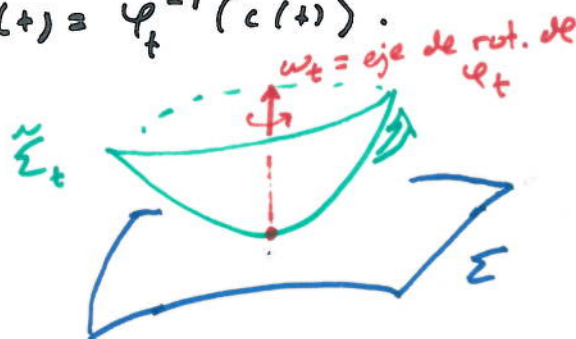


UNA RODANDO DE $\tilde{\Sigma}$ sobre Σ a lo largo de $C \subset \Sigma$ es una curva de ISOMETRIAS $\varphi_t: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ de espacio t.q. $\tilde{\Sigma}_t := \varphi_t(\tilde{\Sigma})$ es tangente a Σ por algún punto $c(t) \in C$.

LA PISTA TRAZADA POR $\tilde{\Sigma}$ del punto de CONTACTO DURANTE UN RODANDO se llama el DESARROLLADO de C por $\tilde{\Sigma}$ durante LA RODANDO. esta curva, $\tilde{C} \subset \tilde{\Sigma}$, es parametrizado por $\tilde{c}(t) = \varphi_t^{-1}(c(t))$.

* UNA RODANDO ES SIN RESBALARSE si para cada t fijado, la curva $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(\tilde{c}(t))$ tiene velocidad cero por $\alpha = t$.

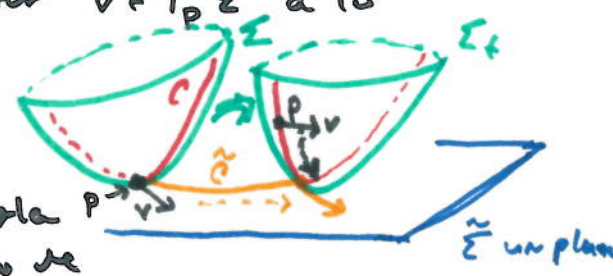
* UNA RODANDO ES SIN TORCER si para cada t , el eje de la parte rotacional de φ_t está contenido en el plano $T_{c(t)}\Sigma = T_{c(t)}\tilde{\Sigma}_t = \varphi_t T_{\tilde{c}(t)}\tilde{\Sigma}$.



DADO UNA CURVA $C \subset \Sigma$ existe única (NO CONSTANTE) RODANDO SIN RESB. y SIN TORCER, φ_t , de $\tilde{\Sigma}$ sobre Σ a lo largo de C , cuando el punto INICIAL DE CONTACTO está dado.

EN RODANDO Σ sobre $\tilde{\Sigma}$ a lo largo de un tal DESARROLLADO $\tilde{C}$ de C , la demovimiento de $\tilde{C}$ por Σ sería C .

LA 'INTERPRETACIÓN ROLLANDO' de la conexión de Levi-Civita es para transportar paralelamente un vector $v \in T_P \Sigma$ a lo largo una curva $p \in C \subset \Sigma$, ROLLAMOS SIN RESB. y sin torcer $\tilde{\Sigma}$ sobre un plano A a lo largo la desarrollada $\tilde{C}$ de C en el plano. El campo vectorial paralelo $v(x) \equiv v$ en el plano se traslada a la espesor tangente de Σ a lo largo de C durante este proceso con el transp. par. de v a lo largo de C .



* la desarrollada de una línea $\tilde{C} \subset \tilde{\Sigma}$ sobre C durante ROLLANDO C sin resb. y sin torcer es una geodésica de C .

* la relación entre ROLLANDO y NUESTROS PRIMEROS DEFINICIONES sigue de: si Y_t es un campo vectorial a lo largo de una curva $c(t) \in \Sigma$, entonces su desarrolla por roll. sin resb. y sin tor. sobre $\tilde{\Sigma}$, un campo vectorial $\tilde{Y}_t$ a lo largo $\tilde{c}(t)$ satisface:

$$\dot{Y}_t \perp T_{c(t)} \Sigma \iff \dot{\tilde{Y}}_t \perp T_{\tilde{c}(t)} \tilde{\Sigma}$$

que sigue por considerando que $R_t \tilde{Y}_t = Y_t$ donde R_t es el parte rotacional de φ_t , y diferenciación conduce a:

$$R_t \dot{\tilde{Y}}_t = \dot{Y}_t + Y_t \times \omega_t \in (T_{c(t)} \Sigma)^\perp \quad (\text{porque } \omega_t \text{ y } Y_t \in T_{c(t)} \Sigma)$$

$$\text{y notar que } R_t T_{\tilde{c}(t)} \tilde{\Sigma} = T_{c(t)} \Sigma.$$

FINALMENTE, OBTENEMOS UNA EXPRESIÓN PARA $\nabla_{\dot{c}(t)} X(t)$ en coordenadas.

Sea $u(t) = (u^1(t), u^2(t))$ una expresión de $c(t)$ en coordenadas y $\bar{X}(t) = (X^1(t), X^2(t))$ las componentes de $X(t) \in T_{c(t)} \Sigma$ en las mismas coordenadas ($\bar{X}(t) = (d_{u(t)} f)^{-1} X(t) \in T_{u(t)} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} \text{entonces } \frac{d}{dt} X(t) &= \frac{d}{dt} X^1(t) \partial_{u^1} f(u(t)) + X^2(t) \partial_{u^2} f(u(t)) \\ &= \dot{X}^j \partial_{u^j} f + X^j \dot{u}^k \partial_{u^j} \partial_{u^k} f = \left(\dot{X}^j + X^i \dot{u}^k T_{ik}^j \right) \partial_{u^j} f + (x) v \end{aligned}$$

(usando la convención de sumación $a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2$)

DONDE EN (*) USAMOS UNA OTRA PROPIEDAD DE LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL, SOBRE SU RELACIÓN CON SEGUNDA DERIVADAS.

LA PROYECCIÓN AL PLANO TANGENTE de Σ , nos da:

$$\nabla_{\dot{u}} \bar{X}(t) = (\dot{X}^1 + X^i \dot{u}^j T_{ij}^1, \dot{X}^2 + X^i \dot{u}^j T_{ij}^2) \quad \text{para la}$$

derivada covariante en coordenadas.

A verifique (*) , es más preciso que

$$\partial_{u^i} \partial_{u^k} f = T_{ik}^j \partial_{u^j} f + h_{ik} \nu$$

dejen por ejercicio.

