

TENSORES

①

UN CAMPO SOBRE UN VARIEDAD ES UN ASIGNACIÓN DE UN OBJETO A CADA PUNTO DE LA VARIEDAD.

CAMPOS DE TENSORES, O SIMPLEMENTE TENSORES, SON CAMPOS DE OBJETOS de álgebra lineal sobre los espacios tangentes

EJEMPLOS: 1) UN CAMPO VECTORIAL

2) La diferencial de un APLICACIÓN $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$p \mapsto dpf \in T_p^*M \quad (\text{o MÁS GENERALMENTE UNA '1-FORMA'})$$

3) UNA MÉTRICA $p \mapsto \langle, \rangle_p$ UN PRODUCTO INTERIOR SOBRE T_pM .

4) "TENSORES TIPO (1,1)" O CAMPOS DE APLICACIONES LINEALES

$$p \mapsto L_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_pM) \quad (L_p \text{ es un TRANSF. LINEAL } T_pM \rightarrow T_pM).$$

p.ej. en MECÁNICA CLÁSICA DE CUERPOS RÍGIDOS, ASOCIADO A UN OBJETO EN ESPACIO ES SU TENSOR DE INERCIAS:

para $p \in \mathbb{R}^3$ $\mathbb{I}_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ENVIA $\vec{\omega}$ A $\mathbb{I}_p \vec{\omega} = \vec{L}$ DONDE $\vec{L}$ ES EL MOMENTO ANGULAR QUE RESULTA EN GIRANDO EL OBJETO ALREDEDOR p POR UN ROTACIÓN CON EJE $\vec{\omega}$ (y velocidad angular $|\vec{\omega}| = \omega$).

p.ej. EN LA GEOMETRÍA DE VARIEDADES COMPLEJAS UNO CONSIDERA ESTRUCTURAS CASI-COMPLEJA, QUE ASIGNA $p \mapsto J_p$, a cada $p \in M$ UN OPERADOR $T_pM \rightarrow T_pM$ QUE ACTUA COMO MULT. por i ($J_p^2 = -Id$).

COMENZAMOS CON UN RESUMEN/RECUERDO DE ÁLGEBRA LINEAL.

SEA V UN ESPACIO VECTORIAL REAL DE DIMENSIÓN n , CON BASE $e_1, \dots, e_n$.

• SU ESPACIO DUAL $V^* = L(V, \mathbb{R})$ TIENE BASE DUAL $e^1, \dots, e^n$ DEFINIDOS POR

$$e^j(e_k) = \delta_k^j = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & \text{c/w} \end{cases}$$



SON PROYECCIONES AL EJE DE COORDENADAS.

• EL PARAMETRO NATURAL $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es $(\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$. EN LAS COORDENADAS DE UN BASE, $(\alpha_j e^j, v^k e_k) = \alpha_j v^j$. ES COMÚN EN NOTACIÓN MATRICIAL

ESCRIBIR VECTORES $V \ni v \leftrightarrow \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \vec{v}$ COMO COLUMNAS, Y COVECTORES $V^* \ni \alpha \leftrightarrow [\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \vec{\alpha}$ COMO FILAS PARA QUE $(\alpha, v) = \vec{\alpha}^T \vec{v}$.

• HAY IDENTIFICACIÓN NATURAL, $V^* = V$, (NO HAY NECESIDAD DE BASE) POR
 $V \ni v \mapsto \hat{v} \in V^*$ DONDE $\hat{v}(x) := (x, v)$.

• FORMAS BILINEALES, $B(V) = \{ \beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ bilin.} \}$, SON UN ESP. VECT.
 TENEMOS IDENTIFICACIONES NATURALES:

$$B(V) = L(V, V^*) = (V \otimes V)^* = V^* \otimes V^*$$

DONDE $L(V, W)$ SIGNIFICA MAPAS LINEALES ENTRE esp. vects. $V \rightarrow W$, y
 $\otimes$ ES PRODUCTO DE TENSOR DE ESP. VECTORIALES (PODEMOS PENSAR DE $V^* \otimes V^* := B(V)$
 COMO UN DEFINICIÓN).

por ej. + dado $\beta: V \rightarrow V^*$ asociamos $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ por $\beta(v, w) := (\beta v, w)$.

+ SI HAS VISTO DEFINICIÓN DE PROD. TENSOR EN TERMINES "UNIVERSAL PROP.",
 SE ASOCIA A $\beta \in B(V)$ LA $\hat{\beta} \in L(V \otimes V, \mathbb{R}) = (V \otimes V)^*$ det. por este prop. UNIV:

$$V \times V \xrightarrow{\quad} V \otimes V$$

$$\beta \searrow_{\mathbb{R}} \hat{\beta} \in L(V \otimes V, \mathbb{R}) = (V \otimes V)^*$$

EN NUESTRO BASE, LAS APLICACIONES BILINEALES $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto e^j(v) e^k(w)$
 FORMAN UN BASE PARA $B(V)$. DEMOSTRAMOS POR $e^i \otimes e^k \in B(V)$, y tenemos

$$\beta(v, w) = \beta_{ij} v^i w^j = (\beta_{ij} e^i \otimes e^j)(v, w) \quad \text{DONDE } \beta_{ij} := \beta(e_i, e_j), \text{ ENTONCES}$$

$$\beta = \beta_{ij} e^i \otimes e^j \text{ EN ESTE BASE.}$$

EN NOTACIÓN MATRICIAL $\beta \leftrightarrow \beta_{ij}$ $\vec{e}^i (\vec{e}^j)^T = [B]$ (n x n MATRIZ) PARA QUE

$$\beta(v, w) = (\vec{v})^T [B] \vec{w}.$$

• SIMILARMENTE, $L_s^r(V) = \{ \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ MULTI-LINEAL} \} = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-veces}}$

$$\text{y } L^r(V^*) = \{ \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ MULTI-LINEAL} \} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-veces}}$$

BASES SON DADOS POR: $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}$ $i_k \in \{1, \dots, n\}$, DONDE $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}(v_1, \dots, v_s) := \prod_{k=1}^s e^{i_k}(v_k)$

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \quad j_k \in \{1, \dots, n\}, \text{ DONDE } e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r}(\alpha^1, \dots, \alpha^r) := \prod_{k=1}^r \alpha^k(e_{j_k})$$

$$\text{OBSERVA QUE } L_1^1(V) = V^* \quad \text{y} \quad L^1(V^*) = V^{**} = V.$$

$$\text{ADEMAS, TENEMOS } L(V, V) = \{ \text{transf. lineales } V \rightarrow V \} = V^* \otimes V = V \otimes V^*$$

• UN TENSOR DE TIPO (r, s) SOBRE V ES UN ELEMENTO

$$T \in \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-veces}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-veces}} =: T_s^r(V).$$

Es decir, τ es una aplicación MULTI-LINEAL

(2)

$$\tau : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$T_s^r(V)$ es un espacio vectorial real. una base está dado por:

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \quad j_k, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

y para cada $\tau \in T_s^r(V)$, tenemos $\tau = \sum_{i_1, \dots, i_s} \tau^{j_1, \dots, j_r}_{i_1, \dots, i_s} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s}$ (conv. de suma!))

donde $\tau^{j_1, \dots, j_r}_{i_1, \dots, i_s} := \tau(e^{j_1}, \dots, e^{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$ son las COMPONENTES DE τ

EN ESTE BASE.

• El ALGEBRA DE TENSORES SOBRE V es el "graded algebra":

$$T(V) := \bigoplus_{r,s \geq 0} T_s^r(V) \quad [\text{con } T_0^0(V) := \mathbb{R}]$$

El producto de $\tau \in T_s^r(V)$ con $\tilde{\tau} \in T_{\tilde{s}}^{\tilde{r}}(V)$ es $\tau \otimes \tilde{\tau} \in T_{s+\tilde{s}}^{r+\tilde{r}}(V)$

DEFINIDO POR $(v_1^1, \dots, v_r^r, v_{s+1}^{r+1}, \dots, v_{s+\tilde{s}}^{r+\tilde{r}}, v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+\tilde{s}}) \mapsto \tau(v_1^1, \dots, v_r^r, v_{s+1}^{r+1}, \dots, v_{s+\tilde{s}}^{r+\tilde{r}}) \cdot \tilde{\tau}(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+\tilde{s}})$

* TENEMOS $T_s^0(V) = L_s(V)$ son s -MULTILINEAL APLICACIONES $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

$T_0^r(V) = L^r(V^*)$ son r -MULTILINEAL APLICACIONES $V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$T_1^1(V) = L(V, V)$ son TRANSFORMACIONES LINEALES $V \rightarrow V$.

EN PARTICULAR $T_1^0(V) = L_1(V) = V^*$ y $T_0^1(V) = V^{**} = V$.

UN TENSOR TIPO $(0, s)$ es SIMETRICAL CUANDO SU VALOR QUEDA EL MISMO EN INTERCAMBIANDO DOS VECTORES EN LO QUE EVALUAMOS.

Equivalentemente — ya que los intercambios o TRANSPOSICIONES GENERAN GRUPOS DE PERMUTACIONES — $\tau \in T_s^0(V)$ es SIMETRICAL CUANDO:

$\sigma \cdot \tau = \tau \quad \forall \sigma \in S_s$ DONDE S_s es el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, s\}$ y

$$\sigma \cdot \tau(v_1, \dots, v_s) := \tau(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)}).$$

ESCRIBIMOS $\text{Sym}^s(V^*)$ PARA TENSORES TIPO $(0, s)$ SIMÉTRICALES

[y SIMILARMENTE $\text{Sym}^r(V)$ PARA TENSORES TIPO $(r, 0)$ SIMÉTRICALES].

• $\text{Sym}^s(V^*) < V^* \otimes \dots \otimes V^* = T_s^*(V)$ es un subespacio vectorial. (4)

TENEMOS UNA PROYECCIÓN por "promediando" sobre S_s acción:

$$T_s^*(V) \rightarrow \text{Sym}^s(V^*), \tau \mapsto \tau^{\text{sym}} := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} \sigma \cdot \tau$$

* $(\tau^{\text{sym}})^{\text{sym}} = \tau^{\text{sym}} ; (\tau \otimes \tilde{\tau})^{\text{sym}} = (\tau^{\text{sym}} \otimes \tilde{\tau}^{\text{sym}})^{\text{sym}} = (\tau \otimes \tilde{\tau})^{\text{sym}} ;$

Los elementos $e^{i_1} \cdot e^{i_2} \dots e^{i_s} := (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s})^{\text{sym}} [1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n]$

Forman un base, y $e^{i(\sigma(1))} \dots e^{i(\sigma(s))} = e^{i_1} \dots e^{i_s} \forall \sigma \in S_s$.

p.ej. cuando $\dim V = 2$, $(e^1)^2 := e^1 \cdot e^1 = \frac{e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^1}{2} = e^1 \otimes e^1$ y $\beta \in \text{Sym}^2(V^*)$ es un producto escalar, tenemos: $\beta = \beta_{11}(e^1)^2 + 2\beta_{12}e^1 \cdot e^2 + \beta_{22}(e^2)^2$. *

• LA ALGEBRA SIMÉTRICA SOBRE V^* es la "graded algebra":

$$\text{Sym}(V^*) := \bigoplus_{s \geq 0} \text{Sym}^s(V^*) \quad \text{con producto de } \tau \in \text{Sym}^s(V^*) \text{ con } \tilde{\tau} \in \text{Sym}^{\tilde{s}}(V^*)$$

DEFINIDO POR $\tau \cdot \tilde{\tau} := (\tau \otimes \tilde{\tau})^{\text{sym}} \in \text{Sym}^{s+\tilde{s}}(V^*)$.

* EL PRODUCTO ES COMUTATIVO: $\tau \cdot \tilde{\tau} = \tilde{\tau} \cdot \tau$, y asociativo gracias a (*).

UN TENSOR TIPO $(0,s)$ es ANTI-SIMÉTRICA ó ALTERNANDO CUANDO SU VALOR CAMBIA POR UN SIGNO EN INTERCAMBIANDO DOS VECTORES EN LO QUE EVALUAMOS. EN TÉRMINOS DE LA ACCIÓN DEL GRUPO DE PERMUTACIONES:

$\tau \in T_s^*(V)$ es ALTERNANDO CUANDO $\sigma \cdot \tau = \text{sgn}(\sigma) \tau \quad \forall \sigma \in S_s$,

DONDE $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\# \text{INTERCAMBIOS DE } \sigma}$

ESCRIBIMOS $\text{Alt}^s(V^*)$ ó $\wedge^s(V^*)$ PARA TENSORES TIPO $(0,s)$ ALTERNANDO,

FORMAN UN SUBESPACIO VECTORIAL DE $T_s^*(V)$ CON UNA PROYECCIÓN:

$$T_s^*(V) \rightarrow \wedge^s(V^*), \tau \mapsto \tau^{\text{alt}} := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} (\text{sgn}(\sigma)) \sigma \cdot \tau$$

* los elementos $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_s} := s! (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s})^{\text{alt}} [1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n]$

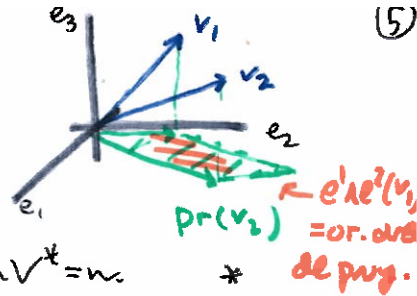
FORMAN UN BASE, y $e^{i(\sigma(1))} \wedge \dots \wedge e^{i(\sigma(s))} = \text{sgn}(\sigma) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_s} \quad \forall \sigma \in S_s$.

EL RE-ESCALANDO por $s!$ del base está PARA RELACIONAR CON

DETERMINANTES, p.ej. $e^1 \wedge e^2(u,v) = (e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1)(u,v) = u^1 v^2 - u^2 v^1$

es el determinante de $e^1 \mapsto pr u, e^2 \mapsto pr v$ DONDE pr es proyección al e^1, e^2 -PLANO (ENTONES "ÁREA" de paralelogramo $\langle pr(u), pr(v) \rangle$ con RES. A $\text{ÁREA}(e^1, e^2)$).

EN GENERAL, $e^i \wedge \dots \wedge e^s (v_1, \dots, v_s) = \det \begin{bmatrix} | & & | \\ \text{pr}(v_1) & \dots & \text{pr}(v_s) \\ | & & | \end{bmatrix}$



DONDE 'pr' es proyección al s -plano $\langle e^1, \dots, e^s \rangle$.

EN PARTICULAR, OBSERVA QUE $\wedge^s(V^*) = \{0\}$ para $s > \dim V^* = n$.

• LA ALGEBRA EXTERIOR SOBRE V^* ES EL "graded algebra":

$$\wedge(V^*) := \bigoplus_{s=0}^n \wedge^s(V^*) \quad \text{CON PRODUCTO DE } \tau \in \wedge^s(V^*) \text{ CON } \tilde{\tau} \in \wedge^{\tilde{s}}(V^*)$$

DEFINIDO POR SU PRODUCTO DE CUÑAS: $\tau \wedge \tilde{\tau} := \binom{s+\tilde{s}}{s} (\tau \otimes \tilde{\tau})^{\text{alt}} \in \wedge^{s+\tilde{s}}(V^*)$.

* EL FACTOR DE-ESCALANDO TRANSFERA ASOCIATIVIDAD DE alt a ' $\wedge$ ' y TIENE QUE ESTAR DE ACUERDO CON DETERMINANTES ($e^i \wedge \dots \wedge e^s = s! (e^i \otimes \dots \otimes e^s)^{\text{alt}}$).

PRODUCTO DE CUÑAS TIENEN: $\tau \wedge \tilde{\tau} = (-1)^{s \cdot \tilde{s}} \tilde{\tau} \wedge \tau$.

UN TRANSFORMACIÓN LINEAL, $V \xrightarrow{L} W$ PERMITE NOS A RETRASAR TENSORES TIPO $(0, s)$ Ó AVANZAR TENSORES TIPO $(r, 0)$.

ES DECIR INDUCE TRANSFORMACIONES LINEALES:

$$L^*: T_s^0(W) \rightarrow T_s^0(V) \quad L_*: T_0^r(V) \rightarrow T_0^r(W)$$

$$L^* \tau(v_1, \dots, v_s) := \tau(Lv_1, \dots, Lv_s)$$

$$L_* \tau(w^1, \dots, w^r) := \tau(L^* w^1, \dots, L^* w^r) \\ [\text{donde } L^* w^i = w^i \circ L]$$

OBSERVA QUE BASTA COMPOSICIÓN, $U \xrightarrow{M} V \xrightarrow{L} W$, TENEMOS $(L \circ M)^* = M^* \circ L^*$ y

$$(L \circ M)_* = L_* \circ M_*$$

CUANDO L ESTÁ INVERTIBLE, PUEDE RETRASAR O AVANZAR TENSORES TIPO GENERAL, USANDO L^{-1} :

$$L_* = (L^{-1})^*: T_s^r(V) \rightarrow T_s^r(W) \quad L^* = (L^{-1})_*: T_s^r(W) \rightarrow T_s^r(V)$$

$$L_* \tau(w^1, \dots, w^r, w_1, \dots, w_s) := \tau(L^* w^1, \dots, L^* w^r, \tilde{L} w_1, \dots, \tilde{L} w_s) \quad L^* \tau(v^1, \dots, v^r, v_1, \dots, v_s) := \tau((L^{-1})^* v^1, \dots, (L^{-1})^* v^r, Lv_1, \dots, Lv_s)$$

UN TENSOR TIPO $(1, 1)$ ES EQUIVALENTE A UN TRANSFORMACIÓN LINEAL DE $V \rightarrow V$.

LA TRAZA ES UNA APLICACIÓN LINEAL

(6)

$$T'_1(V) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{R} = T'_0(V),$$

QUE EN TÉRMINOS DE TENSORES, TIENE LA EXPRESIÓN $v \otimes \alpha \in V \otimes V^* \mapsto (\alpha, v) \in \mathbb{R}$ SOBRE ELEMENTOS "BÁSICOS" (QUE GENERAN EL $V \otimes V^*$).

EN GENERAL, DADO $\tau \in T'_s(V)$ CON $r, s \geq 1$, SE PUEDE FORMAR LA CONTRACCIÓN $-(i, j)$ [CON LOS ~~ÍNDICES~~, ÍNDICES] POR APLICANDO LA TRAZA A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES CON TODAS LAS ENTRADAS EXCEPTO LA 'i' y 'j' FIJADAS:

$$T'_s(V) \xrightarrow{C^i_j} T'_{s-1}(V)$$

$$(C^i_j; \tau)(v^1, \dots, v^{r-1}, v_1, \dots, v_{s-1}) = \text{tr}(\tau(v^1, \dots, v^{r-1}, \cdot, v^i, \dots, v^{r-1}, v_1, \dots, v_{j-1}, \cdot, v_j, \dots, v_s))$$

DONDE $\tau(v^1, \dots, v^{r-1}, \cdot, v^i, \dots, v^{r-1}, v_1, \dots, v_{j-1}, \cdot, v_j, \dots, v_s) \in V \otimes V^*$.

* YA QUE LA TRAZA NO DEPENDE POR ~~DE~~ BASE, DADO $L: V \rightarrow W$ INVERTIBLE, TENEMOS $C^i_j L_* = L_* C^i_j$.

UN CAMPO DE TENSORES (O SIMPLEMENTE UN TENSOR) TIPO (r, s) SOBRE UNA VARIEDAD M ES UNA ASIGNACIÓN:

$$p \mapsto \tau_p \in T'_s(T_p M)$$

QUE ES DIFERENCIABLE EN EL SENTIDO DE QUE SUS COMPONENTES EN UNA BASE INDUCIDA POR UNA CARTA DE M SEA APLICACIONES DIFERENCIABLES:

$$(x^1, \dots, x^n) \in U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} M \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_j|_p = \partial x^j|_p & \text{base de } T_p M \\ d_p x^i & \text{base dual de } T_p M^* \end{cases}$$

* OBSERVA QUE VEYENDO $x^i: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ COMO APLICACIONES DIFF. EL BASE DUAL A $\partial_j|_p$ SON LAS DIFERENCIALES, $d_p x^i$, COMO HEMOS DEFINIDOS ANTES *

* EL HAZ DE TENSORES TIPO (r, s) : $T'_s(M) := \bigcup_{p \in M} T'_s(T_p M)$, ES UNA VARIEDAD CON CARTAS INDUCIDAS POR LAS CARTAS DE M . TENSORES SOBRE M SON SECCIONES DE TALES HAZES $M \xrightarrow{\tau} T'_s(M)$ diferenciables t.q.

$\pi \circ \tau = \text{id}_M$, donde $\pi: T'_s(M) \rightarrow M$, $\tau_p \in T'_s(T_p M) \mapsto p$.

DENOTAMOS EL CONJUNTO DE TENSORES TIPO (r, s) SOBRE M POR $T'_s(M)$ O $T(T'_s(M))$

* TENSORES SIMÉTRICOS O ANTI-SIMÉTRICOS TAMBIÉN FORMAN HAZES DE TANGENTE: ⑦

p.ej. por: $\Lambda^k(T^*M) \subset T_k^0(M)$ con SECCIONES

$$T(\Lambda^k(T^*M)) = \Omega^k(M) \quad \text{LAS } k\text{-FORMAS SOBRE } M.$$

OBSERVA TAMBIÉN QUE $T_0^1(M) = TM$ es el HAZ TANGENTE QUE ya hemos visto, con $T_1^0(M) = \mathcal{X}(M)$ las campos vectoriales, y $T_1^1(M) = T^*M$ es el HAZ COTANGENTE de M .

UNA MÉTRICA (O PRODUCTO ESCALAR) SOBRE M sea una sección $B \in T(\text{Sym}^2(T^*M))$. *

INTEGRACIÓN DE K-FORMAS

Recordamos la FÓRMULA PARA CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRAR EN $\mathbb{R}^k$:

$$\int_{f(D)} p(y) d^k y = \int_D p(f(x)) \det[d_x f] d^k x$$

DONDE $D \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} f(D) \subset \mathbb{R}^k$,
 $x \mapsto f(x) = y$

INTRODUCIREMOS INTEGRALES SOBRE SUBCONTUNTOS gradualmente más complicados:

1) Integración de m -formas ($\dim M = m$) SOBRE CONJUNTOS ABIERTOS glob. PARAMETRIZADOS:

SEA $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow M$ UNA CARTA y $D \subset \mathbb{R}^m$ ^{abierto} con $D \subset \varphi^{-1}(U)$. Para $\omega \in \Omega^m(M)$,
 $x \mapsto \varphi(x)$

$$\int_D \omega := \int_{\varphi^{-1}(D)} \varphi^* \omega \quad \text{DONDE EL LADO DERECHA ENTENDEMOS EN LA SIGUIENTE MANERA:}$$

• $\varphi^* \omega$ es una m -forma sobre $\mathbb{R}^m$, ENTONCES PROPORCIONAL A LA FORMA DE VOLUMEN ORIENTADA de $\mathbb{R}^m$: $\varphi^* \omega = \bar{\omega}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$
 $\bar{\omega}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ UN FUNCIÓN DIFERENCIABLE. AHORA

$$\int_{\varphi^{-1}(D)} \varphi^* \omega := \int_{\varphi^{-1}(D)} \bar{\omega}(x) d^m x \quad \text{es LA USUAL INTEGRAL DE RIEMANN de } \bar{\omega} \text{ SOBRE } \varphi^{-1}(D) \subset \mathbb{R}^m$$

* el valor $\int_D \omega$ DEPENDE DE LA ORIENTACIÓN DE D INDUCIDA POR LA CARTA.

EQUIVALENTAMENTE INTEGRAL DE UNA m -FORMA SOBRE D es BIEN DEFINIDA CUANDO EQUIPAMOS D CON UN ORIENTACIÓN y CALCULA LA INTEGRAL EN CARTAS COMPATIBLES

* LA NOCIÓN DE CONJUNTOS DE MEDIDA CERO ESTÁ BIEN DEFINIDO SOBRE M : (8)
 $A \subset M$ TIENE MEDIDA CERO SI EN UNA CUBRIMIENTO POR CARTAS CON ORIENTACIONES COMPATIBLES, $\int d^m x = 0$. DE HECHO, UNO PUEDE CONSIDERAR INTEGRALES DE m -FORMAS CONTINUAS O INTEGRABLES EN EL SENTIDO DE LEBESGUE POR TOMANDO $d^m x = d\lambda$ PARA LA MEDIDA DE LEBESGUE ESTUDIADA SOBRE $\mathbb{R}^m$.

* LA VERIFICACIÓN QUE LA DEFINICIÓN NO DEPENDE DE ESCOJA DE CARTAS SIGUE DE $L^* \alpha = (\det L) \alpha$ PARA $\alpha \in \wedge^n(V^*)$ ($\dim V = n$) Y $L: V \rightarrow V$, Y LA FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES SOBRE $\mathbb{R}^k$.

2) INTEGRACIÓN DE m -FORMAS SOBRE M (ORIENTADA):
 SEA $(U_i, \varphi_i)_i$ UN ATLAS ORIENTADO Y CONTABLE DE M . ENTONCES

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{D_i} \omega$$
 DONDE $D_1 = \varphi_1(U_1)$, $D_2 = \varphi_2(U_2) \setminus \varphi_1(U_1)$, ...
 SON CONJUNTOS ABIERTOS PARAMETRIZADOS DE M (DISJUNTOS) CON ORIENTACIÓN EN ACUERDO CON LA DE M . y orientados

3) INTEGRACIÓN DE k -FORMAS SOBRE VARIEDADES DE DIMENSIÓN k IMERSIONADAS EN M :
 SEA $N \xrightarrow{i} M$ UNA IMERSIÓN DE N ($\dim N = k$) EN M Y $\omega \in \Omega^k(M)$.

$$\int_{i(N)} \omega := \int_N i^* \omega$$
 DONDE $i^* \omega \in \Omega^k(N)$ SABEMOS COMO INTEGRAR GRACIAS A (2).

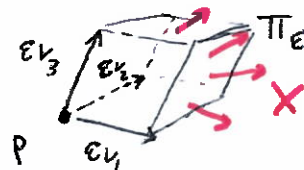
* PLUS GENERALMENTE SE PUEDE CONSIDERAR INTEGRACIÓN SOBRE k -CADENAS ORIENTADAS: APLICACIONES DIFERENCIABLES $I_k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{c_k} M$, $c_k = c_k(I_k) \subset M$ CON LA ORIENTACIÓN INDUCIDA POR LA ESTÁNDAR ORIENTACIÓN DE $\mathbb{R}^k$, ENTONCES

$$\int_{c_k} \omega := \int_{I_k} c_k^* \omega$$



PARA MOTIVAR LA DEFINICIÓN DE DERIVADA EXTERIOR DE FORMAS RECORDAMOS LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL EN $\mathbb{R}^3$ SE PUEDE DEFINIR CON LA SIGUIENTE LÍMITE:

$$\operatorname{div}(X)_p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{flujo } X \text{ por } \partial T_\varepsilon}{\text{VOLUMEN ORIENTADO } T_\varepsilon}$$



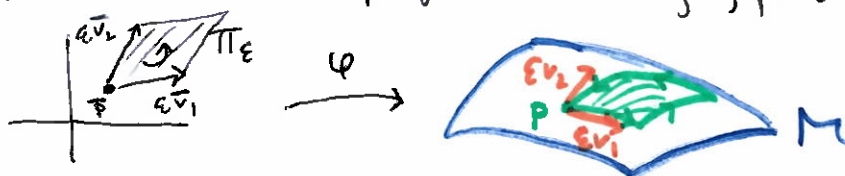
PARA $\omega \in \Omega^k(M)$, SU DERIVADA EXTERIOR ES UNA $(k+1)$ -FORMA $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ QUE SE PUEDE DEFINIR TRAVÉS DE LA SIGUIENTE LÍMITE:

SEA $U \xrightarrow{\varphi} M$ UNA CARTA Y $\bar{p} \in U$, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^m$.

(9)

PARA $\Pi_{\bar{e}}$ EL PARALELOPIPEDO CON BASE $\bar{p}$ Y LADOS $e\bar{v}_j$, PONEMOS

$$f|(\Pi_{\bar{e}}) := \int_{\partial \Pi_{\bar{e}}} \varphi^* \omega$$



DONDE $\Pi_{\bar{e}}$ TIENE ORIENTACIÓN HACIA LA ORDEN $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k+1}$ DE SUS LADOS, Y $\partial \Pi_{\bar{e}}$ LA ORIENTACIÓN HERIDA.

EXPANSIÓN DE $f|(\Pi_{\bar{e}})$ EN ϵ CONDUCE A:

$$f|(\Pi_{\bar{e}}) = \epsilon^{k+1} f_{\bar{p}}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k+1}) + O(\epsilon^{k+2})$$

EL VALOR DE $d\omega$ SERÍA: $d\omega_p(v_1, \dots, v_{k+1}) := f_{\bar{p}}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k+1})$

DONDE $p = \varphi(\bar{p})$ Y $v_j = d_p \varphi(\bar{v}_j)$.

A VERIFICAR ESTE DEFINE VERDADERAMENTE UNA $(k+1)$ -FORMA, QUEDA ESTABLIR QUE:

* $f_{\bar{p}}$ es multi-lineal y anti-simétrica

* $d\omega_p(v_1, \dots, v_{k+1})$ NO DEPENDE POR EL ESCOGE DE CARTA.

EN HACIENDO ESTE, UNO PUEDE ESTABLIR LA EXPRESIÓN PARA derivada exterior en coordenadas:

$$\varphi^* \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \bar{\omega}_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \mapsto \varphi^* d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\bar{\omega}_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

DONDE $\bar{\omega}_{i_1, \dots, i_k}$ SON LAS COMPONENTES DE ω EN COORDENADAS, Y

$d\bar{\omega}_{i_1, \dots, i_k} = \partial_j \bar{\omega}_{i_1, \dots, i_k} dx^j$ SON SUS DIFERENCIALES (VISTO COMO FUNCIONES).

* RELACIÓN IMPORTANTE/FUNDAMENTAL ENTRE ω Y $d\omega$ SE CAPTURA EN

EL TEOREMA DE STOKES: SEA N UNA VARIEDAD ORIENTADA CON FRONTERA

∂N (CON LA ORIENTACIÓN HERIDA DE N) Y $\omega \in \Omega^{\dim N - 1}(N)$. ENTONCES

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega \quad \text{CUANDO LOS DOS LADOS SON FINITOS.}$$



* EL PARAMIENTO ENTRE FORMAS Y CADENAS $(\omega^k, c_k) = \int_{c_k} \omega^k$

ES LINEAL, Y CONDUCE A MANERA CALCULAR LA COHOMOLOGY DE UNA VARIEDAD.

Sea $C_k(M) = \{ \sum w_j c_j^k : w_j \in \mathbb{R} \}$ El grupo ABELIANO GENERADO POR COMBINACIONES LINEALES DE k -cadenas (es un grupo enorme).

Los grupos de HOMOLOGIA de M SON LAS COCIENTES DE LA COMPLEJA: $\dots \rightarrow C_k(M) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(M) \rightarrow \dots$ $H_k(M) := \frac{\ker \partial_k}{\text{im } \partial_{k+1}}$

Donde $\partial_k = \partial$ es LA OPERACIÓN DE FRONTERA ($\partial^2 = 0$).

Los grupos de COHOMOLOGIA de M VIENEN DE LA COMPLEJA: $\dots \rightarrow C^k(M) \xrightarrow{\delta_k} C^{k+1}(M) \rightarrow \dots$



1-cadena CERRADA ($\partial c_1 = \emptyset$) que NO ES FRONTERA DE UN 2-cadena.

$H^k(M) := \frac{\ker \delta_k}{\text{im } \delta_{k-1}}$ DONDE $C^k(M) = C_k(M)^*$ y

$(\delta_k c^k, c_{k+1}) := (c^k, \partial_{k+1} c_{k+1})$ (ENTONES $\delta^2 = 0$). EVIDAMENTE CADA $\omega^k \in \Omega^k(M)$ PODEMOS PENSAR COMO UN ELEMENTO DE $C^k(M)$ por

$(\omega^k, c_k) = \int_{c_k} \omega^k$. LA OPERACIÓN δ CONVERTE A LA OPERACIÓN DE DERIVADA EXTERIOR, gracias a STOKES: $(\delta \omega^k, c_{k+1}) = \int_{c_{k+1}} \omega^k = \int d\omega^k = (\omega^{k+1}, c_{k+1})$.

EN PARTICULAR, TENEMOS $d^2 = 0$ y los grupos de COHOMOLOGIA de deRham VIENEN DE LA COMPLEJA: $\dots \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{d_k=d} \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \dots$

$H_{dR}^k(M) := \frac{\ker d_k}{\text{im } d_{k-1}}$. LA TEOREMA de deRham es que $H_{dR}^k(M) = H^k(M)$.

LLAMAMOS UNA k -FORMA CON $d\omega^k = 0$ CERRADO y UNA k -FORMA CON $\omega^k = d\omega^{k-1}$ EXACTA. APLICACIONES DIFERENCIABLES $f: M \rightarrow N$ INDUCEN APLICACIONES ENTRE LOS grupos de COHOMOLOGIA: $f^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ $[\omega] \mapsto [f^* \omega]$.

DOS APLICACIONES HOMOTOPICALES ($\exists h: [0,1] \times M \rightarrow N$ diff. con $h|_{\{0\} \times M} = f, h|_{\{1\} \times M} = g$) INDUCEN LAS MISMAS TRANSFORMACIONES DE H^k . *

DERIVACIONES DE TENSORES

EN GENERAL LLAMAMOS UNA DERIVACION de TENSORES de M UNA SISTEMA DE APLICACIONES $D = \partial_s^r: \tau_s^r(M) \rightarrow \tau_s^r(M)$

t.q. $D(\tau \otimes \tilde{\tau}) = (D\tau) \otimes \tilde{\tau} + \tau \otimes (D\tilde{\tau})$ y

$D(c\tau) = c(D\tau)$ CUANDO c es CUALQUIER CONTRACCION.

Ejemplo: ya que el flujo φ_t de un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ en un DIFEOMORFISMO, PODEMOS RETRASAR TENSORES de tipo general:

(11)

$$\varphi_t^*: T_s^r(T_{\varphi_t(p)}M) \rightarrow T_s^r(T_pM).$$

LA DERIVADA DE LIE de $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ es:

$$(\mathcal{L}_X \tau)_p := \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi_t^* \tau_{\varphi_t(p)} \quad \text{ó bien} \quad \mathcal{L}_X \tau = \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi_t^* \tau$$

que TAMBIÉN ES UN TENSOR TIPO (r,s) debido a que todos $\varphi_t^* \tau_{\varphi_t(p)} \in T_s^r(T_pM)$ QUEDAN EN UN ESPACIO VECTORIAL FIJADO.

LAS APLICACIONES $\mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$, $\tau \mapsto \mathcal{L}_X \tau$ SON UN DERIVACIÓN DE TENSORES SEGÚN LA DEFINICIÓN ARRIBA.

UNA DERIVACIÓN DE TENSORES ESTA DETERMINADO POR SU ACCIÓN SOBRE FUNCIONES $\mathcal{F}(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$ y campos vectoriales:

1) Sea $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y $\omega^1, \dots, \omega^s \in \Omega^1(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{X}(M)$.

ENTONCES $\tau(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_s) \in \mathcal{F}(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$ es un COMPOSICIÓN DE CONTRACCIONES DE:

$$\tau(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_s) = \mathcal{C}(\tau \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s).$$

AHORA, USANDO QUE $\mathcal{D}$ CONUTA CON CONTRACCIONES y su REGLA DE LEIBNIZ, OBTENEMOS:

$$(\mathcal{D}\tau)(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_s) \stackrel{(*)}{=} \mathcal{D}(\tau(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s \mathcal{D}\omega^i(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, X_s) - \sum_{j=1}^s \tau(\omega^1, \dots, \omega^s, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s)$$

ENTONCES $\mathcal{D}\tau$ ESTA DETERMINADO POR $\mathcal{D}$ SOBRE $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{X}(M)$ y $\Omega^1(M)$.

2) APLICANDO $(*)$ a $\alpha \in \Omega^1(M)$, TENEMOS:

$$(\mathcal{D}\alpha)(X) = \mathcal{D}(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{D}X)$$

ENTONCES, DE HECHO $\mathcal{D}$ SOBRE 1-FORMAS ESTA DETERMINADO POR $\mathcal{D}$ SOBRE $\mathcal{F}(M)$

y $\mathcal{X}(M)$, y gracias a (1) $\mathcal{D}$ EN GENERAL ESTA DETERMINADO POR $\mathcal{D}$ SOBRE $\mathcal{F}(M)$ y $\mathcal{X}(M)$.

* EN PARTICULAR, $\mathcal{L}_X \tau$ SE PUEDE EXPRESAR POR $\mathcal{L}_X f = X.f$ y $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

IDENTIDADES

SOBRE UNA VARIEDAD M , HEVOS ENCONTRADO LAS SIGUIENTES DERIVADAS FUNDAMENTALES:

$$\mathcal{L}_X: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M)$$

$X \in \mathcal{X}(M)$ DERIVADA DE LIE

$$d: \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{s+1}(M)$$

DERIVADA EXTERIOR.

AÑADEMOS UNA DERIVADA QUE ENCAPSULA LA OPERACIÓN FUNDAMENTAL DE CONTRACCIÓN. LA DERIVADA INTERIOR DE $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ ($s \geq 1$)

EN $L_X \tau(w^1, \dots, w^r, x_1, \dots, x_{s-1}) := \tau(w^1, \dots, w^r, X, x_1, \dots, x_{s-1})$ DONDE $X \in \mathcal{X}(M)$.

O BIEN:

$$L_X : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^r(M), \quad X \in \mathcal{X}(M) \quad \text{LA DERIVADA INTERIOR}$$

POR $\tau \mapsto \mathcal{C}(\tau \otimes X)$, CON $\mathcal{C}$ UN CONTRACCIÓN SUITABLE.

ENTRE ESTAS DERIVADAS TENEMOS LAS SIGUIENTES IDENTIDADES, PARA EL CÁLCULO DIFERENCIAL SOBRE VARIEDADES:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_X = dL_X + L_X d & \text{(FORMULA MÁGICA DE CARTAN)}, \\ \mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X \alpha, \quad \mathcal{L}_X(L_Y \alpha) = L_{[X,Y]} \alpha + L_Y \mathcal{L}_X \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta, \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge d\beta, \\ L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge L_X \beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta, \quad f^* d\alpha = d(f^* \alpha), \\ d(d\alpha) = 0, \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha. \end{cases}$$

$$d\alpha(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, X_n)$$

$\nearrow$
OMITE X_i, X_j

AQUI, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^a(M)$, $\beta \in \Omega^b(M)$ y $f: N \rightarrow M$ ES UN APLICACION DIFF,
y $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ (CON $s \geq 1$).