

TAREA 1

preparar 5 (o más) de los siguientes ejercicios para entregar (~2 de Febrero)

1. Sea Δ un triángulo con lados de longitud a, b, c inscrito en un círculo de radio r . Mostrar $\frac{1}{r} = \frac{4Area(\Delta)}{abc}$.
2. Considera una curva con parametrización regular $c(t)$. Mostrar (con las notaciones de clase) que las curvaturas son expresados por la formula: $|\kappa(t)| = k(t) = \frac{|\ddot{c}(t) \cdot J\dot{c}(t)|}{|\dot{c}(t)|^3}$.
3. Calcular la curvatura y torsión de:
 - (a) cónicas (parametrizado por ejemplo como $(a \cos t, b \sin t)$ –elipses o $(a \cosh t, b \sinh t)$ –hipérbolas).
 - (b) un hélice (parametrizado por ejemplo como $(a \cos t, b \sin t, ct)$)
4. (a) Sea $c(s)$ una curva planar parametrizado por longitud del arco. Pon $b(s) := c(s) + r(s)$ donde $r(s) := (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ es un vector unitario. Determina una condición (un EDO) sobre $\theta(s)$ para que $b'(s)$ esta alineado con $r(s)$.
 (b) Cuando $c(s)$ esta una línea, dar una parametrización de $b(s)$.
5. Determinar extremales de la funcional $y(x) \mapsto \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ donde $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ con $y(0), y(1) > 0$ fijado.
6. (a) Mostrar que la evoluta (la envolvente de las líneas normales) de una curva es el conjunto de centros de curvatura (centros de círculos osculantes) de la curva.
 (b) Parametrizar la evoluta de la parábola $y = x^2$.
7. (a) La involuta de una curva planar es el conjunto de puntos trazados por el final de una cuerda con longitud fija que esta unida a la curva en un punto fijo. Muestra que la línea tangente a la involuta en un punto es perpendicular a la cuerda en este punto.
 (b) La curva cicloide esta definida por la curva que traza un punto en un círculo cuando el círculo se rueda sin resbaldarse a lo largo de una línea. Calcular la longitud de un arco de la cicloide (un arco sea cuando el círculo se rueda alrededor una vez). Determina la involuta de una cicloide cuando una cuerda con la mitad de la longitud de un arco es adherida a la 'cusp' de la cicloide.
8. El grupo de rotaciones, O_3 , consiste en transformaciones lineales, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que preservan el producto interior estandar: $A\vec{u} \cdot A\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
 (a) Para $A \in O_3$, mostrar que: $AA^T = A^T A = I$. Deducir que: $\det A = \pm 1$.
 Denotamos el conjunto de rotaciones que preservan la orientación standard del espacio (las que tienen determinante 1) como: SO_3 .
 (b) Deja que $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in SO_3$ sea una curva suave de rotaciones con $A(0) = I$. Mostrar que $\Omega := \frac{d}{dt}|_{t=0} A(t)$ es anti-simétrica: $\Omega^T = -\Omega$.
 El conjunto de todas las transformaciones lineales anti-simétricas es un espacio vectorial, que denotamos como: $\mathfrak{so}_3$.
 (c) Para $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, considera $\Omega_{\vec{\omega}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{v} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{v}$. Mostrar que $\Omega_{\vec{\omega}} \in \mathfrak{so}_3$. Verificar que la aplicación $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}_3$ dado por $\vec{\omega} \mapsto \Omega_{\vec{\omega}}$ es un isomorfismo lineal.
9. Considera una curva espacial con marco T, N, B de Frenet-Serret. Mostrar que $T' = kN$.
10. Sea $c(t)$ una parametrización regular de una curva espacial. Mostrar que la torsión esta dado por:

$$\tau(t) = \frac{(\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)) \cdot \dddot{c}(t)}{|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|^2}.$$