# Tarea 2

preparar 5 (o más) de los siguientes ejercicios para entragar ($\sim$16 de Febrero)

1. Sea $C \subset \mathbb{E}^2$ una curva planar regular. Para $p \in C$, mostrar que existe coordenadas Cartesianas $(x, y)$ de $\mathbb{E}^2$ tal que alrededor $p$, la curva se puede representar por una gráfica: $(x, y(x))$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ con $d_{p_o} f$ surjectiva algún $p_o \in \mathbb{R}^{n+k}$.

   Mostrar (se puede usar la teorema de funciones inversos) que existen sistemas de coordenadas alrededor $p_o, f(p_o)$ ($\phi : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \psi : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$) para que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) = y$.

   *sugerencia: considera la decomposición $\mathbb{R}^{n+k} = \ker(d_{x_o} f) \oplus \ker(d_{x_o} f)^\perp \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (X, Y)$, y la transformación $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (X, Y) \mapsto (X, \bar{f}(X, Y))$ donde $\bar{f}(X, Y)$ es la proyección de $f(X, Y)$ sobre $\ker(d_{x_o} f)^\perp$.

3. Considera un toro de revolución generado por girando el círculo $\{(y - a)^2 + z^2 = b^2, x = 0\}$ (donde $a > b$) alrededor el eje-$z$. Verificar que este toro tiene un atlas. También dar una descripción implicita de este superficie.

4. (a) Para $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continuo, pon $\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg \, dt$. Verificar que este da un producto interior sobre el espacio de funciones $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. En particular, satisface la inegalidad de Cauchy-Schwarz.

   (b) Considera las funcionales $\ell, E$ sobre curvas en una superficie con puntos finales fijados parametrizados por $c : [0, 1] \to \Sigma$ (es decir, $\ell(c) := \int_0^1 |\dot{c}| \, dt, \quad E(c) := \int_0^1 |\dot{c}|^2 \, dt$).

   Mostrar que $c_*$ minimiza $E \iff c_*$ minimiza $\ell$ y $|\dot{c}_*| = cst$.

5. Verificar que las geodésicas en una esfera son gran circulos (interseciones de la esfera con planos pasando por su centro). Calcular la curvatura geodesica de una latitud de una esfera (intersecion de la esfera con algún plano).

6. La convención de sumación de Einstein es: cuando la misma indece parece arriba y abajo significa que debes sumar sobre este indece (para superficies de 1 a 2, p.ej. $a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2$).

   (a) para la Lagrangiana, $L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$, con $g_{12} = g_{21}$ y todos $g_{ij}$ funciones de $u^1, u^2$ verficar que las ecuaciones de Euler-Lagrange ($\frac{d}{dt} \partial_{\dot{u}^j} L = \partial_{u^j} L$) son de la forma:

   $$\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

   con $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} (g_{j\ell,i} + g_{\ell i,j} - g_{ij,\ell})$, donde $g_{ij,k} := \partial_{u^k} g_{ij}$ y $g^{ij}$ son las entradas del matrix inverso al matriz con entradas $g_{ij}$ (entonces $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$).

   (b) Para la parametrización $(u^1, u^2) \mapsto f(u^1, u^2) \in \Sigma \subset \mathbb{E}^3$, mostrar que:

   $$f_{ij} = \Gamma^k_{ij} f_k + h_{ij} \nu$$

   donde $f_i := \partial_{u^i} f, f_{ij} := \partial_{u^i} \partial_{u^j} f, g_{ij} := f_i \cdot f_j$ y $h_{ij}$ son las componentes de la segunda forma fondamental, $h_{ij} := \nu \cdot f_{ij}$ con $\nu$ un normal unitario a $\Sigma$.

7. Sea $V$ un espacio vectorial de dimension $n$ con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

   Para $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y simétrica, con representantación matrizial $B : V \to V$ (es decir $\beta(u, v) = \langle Bu, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$ cada $u, v \in V$) verificar que:

   (a) Los autovalores, $\lambda_j$, de $B$ son real con espacios propios ortogonal.

   (b) $\lambda_j$ son valores criticales de la aplicación $SV \to \mathbb{R}, u \mapsto \beta(u, u)$ donde $SV = \{u \in V \text{ t.q. } \langle u, u\rangle = 1\}$.

8. Una dirección asintotica sobre $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ es una $v \in T_p\Sigma$ tal que $II_p(v,u) = 0$ para cada $u \in T_p\Sigma$. Una linea asintotica de $\Sigma$ es una curva integral de tal campo de lineas.

   (a) Si una curva $C \subset \Sigma$ es una curva asintotica y una geodesica, mostrar que es una linea.

   (b) Si la curvatura medio de $\Sigma$ es cero, mostrar que hay dos direcciones asintoticas en cada punto que son ortogonal.

9. (a) calcular la curvatura Gaussiana y la curvatura medio del toro de revolución en problema 3

   (b) determinar condiciones sobre un superficie de revolución parametrizado: $f(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, z(u))$ para que sea de curvatura Gaussiana constante.

10. Establir que en coordenadas, la curvatura Gaussiana y la curvatura medio son dados por:

$$K = \det(g^{-1}h) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad 2H = tr(g^{-1}h) = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

   donde $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ son las represantaciones matriciales de $I, II$ en coordenadas.

11. Una superficie es desarollable, si su familia de planos tangentes solo depende de un parametro.

   (a) Mostrar que una gráfica, $z = f(x,y)$, es una superficie desarollable cuando $f_{xx}f_{yy} = (f_{xy})^2$.

   (b) Mostrar que una superficie es desarollable si su curvatura Gaussiano es cero.

12. En coordenadas polares por el plano, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, verificar que las derivadas covariantes de los campos coordenadas $\partial_r = \frac{(x,y)}{r}, \partial_\theta = (-y, x)$ son dados por:

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = -r\partial_r, \quad \nabla_{\partial_\theta}\partial_r = \nabla_{\partial_r}\partial_\theta = \frac{\partial_\theta}{r}.$$

13. Determina el angulo de rotación de un vector tangente a la esfera cuando se transporte parallelmente alrededor un latitud de la esfera.

   *sugerencia: considera el cono tangente a la esfera a lo largo tal latitud, y aplica la interpretación de transporte paralelo por rodando.