Tarea 3

preparar 5 (o más) de los siguientes ejercicios para entragar

1. Sea $S^n_r = \{(x^1)^2 + ... + (x^{n+1})^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera de radio r (ver doCarmo ex. 4.6 pg. 19).

   (a) Construir un atlas para S^n_r usando proyecciones esterograficas para las cartas (p.ej. enviar un punto $(x^1, ..., x^n)$ a la intersección de S^n_r con la linea pasando por $(0, ..., 0, 1)$ y $(x^1, ..., x^n, 0)$)

   (b) Construir un atlas para S^n_r usando proyecciones ortogonales de hemisferios para las cartas (p.ej. enviar un punto $(x^1, ..., x^n)$ a la punto $(x_1, ..., x^n, x^{n+1} = \sqrt{r^2 - (x^1)^2 - ... - (x^n)^2})$ de la esfera)

   (c) Verificar que las dos atlases de partes (a) y (b) son compatibles, es decir cualquier par de cartas de las dos atlases son compatibles.

2. Sea $\varphi : U \to M$ una carta alrededor de p (entonces $p = \varphi(\bar{p})$ algún $\bar{p} \in U \subset \mathbb{R}^m$). Escribe $e_1, ..., e_m$ para el base estandard de $\mathbb{R}^m$.

   (a) Mostrar que las vectores tangentes $\partial_j|_p := [\varphi(\bar{p} + te_j)]$ dan un base para T_pM (pensado como clases de equivalencia de curvas). Digamos tal base es un base coordenetario para T_pM.

   (b) Sea $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to M$ algún otra carta alrededor de p con $\tilde{\varphi}(\tilde{p}) = p$ y asociado base coodenetario $\tilde{\partial}_j|_p$ de T_pM. Escribe $U \ni x = (x^1, ..., x^m) \mapsto (\tilde{x}^1(x), ..., \tilde{x}^m(x)) = \tilde{x}(x) \in \tilde{U}$ para la aplicación de transición $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$. Establir la regla de transformación (convención de sumacion!):

   $$\tilde{v}^k = \partial_j \tilde{x}^k|_{\bar{p}}\ v^j = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}|_{\bar{p}}\ v^j,$$

   donde $v = v^j \partial_j|_p = \tilde{v}^k \tilde{\partial}_k|_p \in T_pM$ es un vector tangente con componentes $v^j, \tilde{v}^k$ en las corespondientes bases coordenetarios.

3. (a) Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ x = (x^1, ..., x^m) \mapsto f(x)$ un aplicación diferenciable. Mostrar que $f(x) = f(0) + x^j g_j(x)$ con $g_j(0) = \partial_j f(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$. (Sugerencia: considerar $\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\ dt$).

   (b) Sea φ una carta de M centrado por p (es decir $\varphi(0) = p$). Mostrar que las derivaciones (vectores tangentes) $\partial_j|_p f := \frac{d}{dt}_{t=0} f(\varphi(te_j))$ forman un base para T_pM (aqui $f : M \to \mathbb{R}$ es un aplicación diferenciable sobre algún barrio de p, y $e_1, ..., e_m$ son el base estandard de $\mathbb{R}^m$).

4. Escribimos T_pM^{cur}, T_pM^{der} para la descripción de vectores tangentes a M por p en terminos de curvas o derivaciones respectivamente.

   (a) Mostrar que la transformación $T_pM^{cur} \to T_pM^{der}, [c] \mapsto (vf := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(c(t)))$ es una isomorfismo lineal. Escribimos T_pM para el espacio tangente en cualquier descripción bajo este identificación.

   (b) Sea $f : M \to N$ un aplicación diferenciable con $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N,\quad [c] \mapsto [f \circ c]$ su diferencial. Mostrar que bajo la identificación de (a), en terminos de derivaciones tenemos $(d_pfv)g = v(g \circ f)$ donde $g : N \to \mathbb{R}$ es diferenciable por $f(p)$.

   (c) Sea $f : M \to N$ un aplicación diferenciable y φ, ψ cartas de M, N alrededor de $p, f(p)$. Escribe $x = (x^1, ..., x^m) \in U \mapsto \bar{f}(x) = (\bar{f}^1(x), ..., \bar{f}^n(x)) \in V$ para la aplicación $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \bar{f}$ representando f en coordenadas. Verificar que

   $$d_pf(v^j \partial_{x^j}|_p) = \left(\frac{\partial \bar{f}^k}{\partial x^j}|_{\bar{p}}\ v^j \right) \partial_{y^k}|_{f(p)}$$

   donde $\varphi(\bar{p}) = p$ y $\partial_{x^j}|_p$ y $\partial_{y^k}|_{f(p)}$ son las bases coordenetarias para $T_pM, T_{f(p)}N$ inducidas para las cartas φ, ψ.

5. Sea $\mathbb{RP}^n = \{$ subespacios vectoriales de dimension 1 en $\mathbb{R}^{n+1}\}$ el espacio proyectiva real de dimensión n. Equipamos $\mathbb{RP}^n$ con la topología cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \backslash 0 \to \mathbb{RP}^n$ que envia $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash 0$ a la linea espaneado por x. Dar un atlas para $\mathbb{RP}^n$ (ver doCarmo ex. 2.4 pg. 4).

6. Sea U, V espacios vectoriales reales de dimension 2, y $U \otimes V$ su producto tensorial (un espacio vectorial real de dimension 4).

   (a) Verificar que $\sigma : \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(U \otimes V)$, $([u],[v]) \mapsto [u \otimes v]$ es un encajamiento de $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^3$ (llamado encajamiento de Segre).

   (b) En coordenadas afinas, describe el imagen, $im(\sigma)$, como un conjunto de nivel cero de un aplicación. Verificar que $im(\sigma)$ es un superficie reglada en $\mathbb{RP}^3$ (existe un linea de $\mathbb{RP}^3$ contenido en $im(\sigma)$ pasando por cada punto de $im(\sigma)$).

7. doCarmo, pg. 31 # 1 (variedades productos). Ademas muestra que hay un natural identificación entre $T_{(m,n)}M \times N$ con $T_mM \oplus T_nN$.

8. doCarmo, pg. 33 # 10 (variedades cocientes).

9. Sea $N \subset M$ una subvariedad y $p \in N$. Para curvas tenemos una inclusion natural $T_pN \subset T_pM$. Mostrar que para derivaciones, tenemos una inclusion:

   $T_pN = \{v \in T_pM : vf = 0 \text{ cada } f \in \mathcal{F}_p(M) \text{ con } f|_{(U \cap N)} = 0 \text{ algún barrio } M \overset{abierto}{\supset} U \ni p\}$.

10. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable con $p \in M$ un punto critical de f (es decir $d_pf \equiv 0$). Para $u, v \in T_pM$ y $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ con $U_p = u, V_p = v$, verificar que $Hess(f)_p(u,v) := U(Vf)(p)$ define una forma bilineal y simetrica sobre T_pM.

    (aqui estamos pensando de U, V como derivaciones de funciones, entonces $Vf \in \mathcal{F}(M)$)

11. (a) Para V un espacio vectorial y $\tau, \tilde{\tau} \in T_s^0(V)$, mostrar que $(\tau^{alt} \otimes \tilde{\tau})^{alt} = (\tau \otimes \tilde{\tau}^{alt})^{alt} = (\tau \otimes \tilde{\tau})^{alt}$.

    (b) Para $\omega_j \in \bigwedge^{i_j}(V^*)$ tensores anti-simetricales, mostrar que: $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$.

12. Sea V un espacio vectorial real de dimension n. Para $L : V \to V$ lineal y $\alpha \in \bigwedge^n(V^*)$ mostrar que $L^*\alpha = \det(L)\alpha$.

13. Sea M un variedad orientable, mostrar que existe una $\omega \in \Omega^m(M)$ (donde $dim(M) = m$) tal que $\omega_p \neq 0$ cada $p \in M$.