Tarea 5

preparar 5 (o más) de los siguientes ejercicios para entragar

1. Sea $\nabla, \tilde{\nabla}$ conexiones afinas sobre una variedad M.

   (a) Mostrar que $S(X,Y) = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ es un tensor tipo $(1,2)$ sobre M.

   (b) Verificar que ∇ y $\tilde{\nabla}$ tienen la misma tensor de torsión[1] exactamente cuando S es simétrica: $S(X,Y) = S(Y,X)$.

2. Sobre $\mathbb{R}^3$ definimos $\nabla_X Y := dY(X) + \frac{1}{2} X \times Y$ para $X, Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales (y $\times$ el producto cruz). Verificar que ∇ es un conexion afina con tensores de torsion y curvatura[2] dado por:

$$T(X,Y) = X \times Y, \quad R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(X \times Y) \times Z.$$

3. Un variedad M es paralelizable cuando existe $X_1, ..., X_m \in \mathfrak{X}(M)$ con $\{X_j(p)\}$ un base para T_pM cada $p \in M$. Llamamos tales campos vectoriales un paralelización de M.

   (a) Dado un paralelización, $\{X_j\}$, de M y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ verificar que $\nabla_X Y := (XY^j)X_j$ (donde $Y = Y^j X_j$) da una conexión afina sobre M. Mostrar que su tensor de curvatura es cero.

   (b) Considera la paralelización de $\mathbb{R}^2$ por $X_1 = \cos x \partial_x + \sin x \partial_y, \quad X_2 = -\sin x \partial_x + \cos x \partial_y$, y sea ∇ la conexión afina sobre $\mathbb{R}^2$ inducida como en parta (a). Mostrar ∇ no es libre de torsión.

4. Sea ∇ una conexión afina sobre (M,g) compatible con g. Mostrar que ∇ esta determinado por la formula de Koszul ($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$):

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)$$

   y ademas en coordenadas, sus simboles de Christoffel son dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(g_{i\ell,j} + g_{j\ell,i} - g_{ij.\ell} \right).$$

5. (a) Para ∇ conexión afina sobre M, mostra que su tensor de curvature $R^\nabla : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ es $\mathcal{F}(M)$ lineal, y induce un buen definida tensor tipo (1,3) $R^\nabla(x,y)z := \left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right)|_m$ donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ son algunos extensiones de $x, y, z \in T_mM$.

   (b) Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mostra la identidad de Jacobi:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] + 0.$$

   (c) Cuando ∇ es libre de torsión mostra la 1'er identidad de Bianchi:

$$R^\nabla(x,y)z + R^\nabla(y,z)x + R^\nabla(z,x)y = 0.$$

   (d) Cuando ∇ es la conexión de Levi-Cevita de una métrica g mostrar la identidad:

$$g(\mathrm{Rm}(x,y)z, w) = g(\mathrm{Rm}(z,w)x, y).$$

6. doCarmo pg. 181 # 5

[1] La tensor de torsión de un conexión afina, ∇, esta definido por $T^\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.

[2] La tensor de curvatura de un conexión afina, ∇, esta definido por $R^\nabla(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$.

7. Sea $f \in \mathcal{F}(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ para (M, g) variedad Riemanniana con connexión de Levi-Cevita ∇.

   (a) Definimos el gradiente $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ por $g_m(\nabla_m f, v) = d_m f(v)$ cada $v \in T_m M$. Recordar que el Hessiano $Hess(f) := \nabla(df)$. Mostrar que $Hess(f)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$ y derivar su expresión en coordenadas.[1]

   (b) ∇X es una (1,1)-tensor[2] sobre M presentado por la aplicación lineal sobre espacios tangentes por $v \mapsto \nabla_v X$. Derivar la expresión en coordenadas para $div(X) := tr(\nabla X) \in \mathcal{F}(M)$.

8. (a) Sea ω_g el formen de volumen inducido por la métrica g. Verificar que $d(i_X \omega_g) = div(X)\omega_g$.

   (b) Definir el Laplaciano de f por $\Delta f := div(\nabla f)$. Determinar la relación entre Δf y $Hess(f)$.

9. doCarmo pg. 85 # 12

10. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y $\varphi \in \mathcal{F}(M)$. Pon $\tilde{g} := e^{2\varphi} g$ (otra métrica Riemanniana sobre M relacionada conformalmente a g).

    (a) Relacionar las 2-formas de curvatura Ω y $\tilde{\Omega}$ de $g, \tilde{g}$.

    Sugerencia: calcular con las ecuaciones estructural de Cartan basado en una sistema de coordenadas normales por $m \in M$ (entonces $\omega^i_j|_m = \Gamma^i_{kj}\omega^k|_m = 0$).

    (b) Para una métrica conformalmente plano (en coordenadas: $g = e^{2\varphi(x)}((dx^1)^2 + ... + (dx^n)^2)$) derivar expresiones para sus curvaturas seccionales.

[1] Observa que en puntos criticos de f nuestro definición aqui es de acuerdo con la de tarea 3 # 10.
[2] Observa que en ceros de X nuestro definición de ∇X es de acuerdo con la linearización de X de tarea 4 # 8.