Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT)
Escuela de Nudos y 3-Variedades 2013

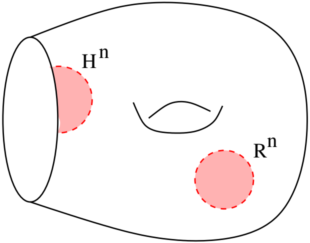
Mini-curso:
Superficies incompresibles y frontera incompresibles en exteriores de nudos en la 3-esfera.

I. Conceptos fundamentales

Luis G. Valdez Sánchez
University of Texas at El Paso

Variedades

Una variedad topológica de dimensión $n \geq 0$ es un espacio topológico Hausdorff localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ o al espacio $\mathbb{H}^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$.



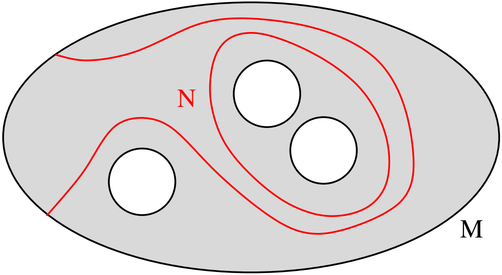
Una variedad topológica es diferenciable o PL si admite una estructura diferenciable o PL ('triangulación').

Es común asumir además en estos casos que la variedad sea segundo numerable (paracompacidad, medida).

En dimensiones $n \leq 3$, toda variedad topologica admite una única estructura diferenciable y una única estructura PL (módulo isomorfismos).

Para M una variedad, una subvariedad $N \subseteq M$ esta propiamente encajada en M si el encaje de N en M es transversal a la frontera de M:

$$(N, \partial N) \subseteq (M, \partial M)$$



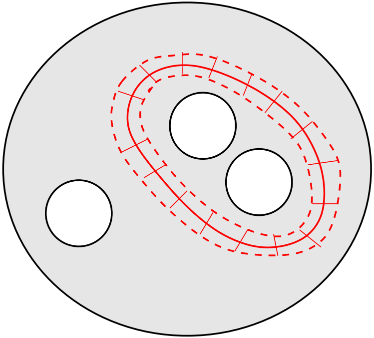
Superficies

Por superficie se entiende una variedad de dimensión 2.

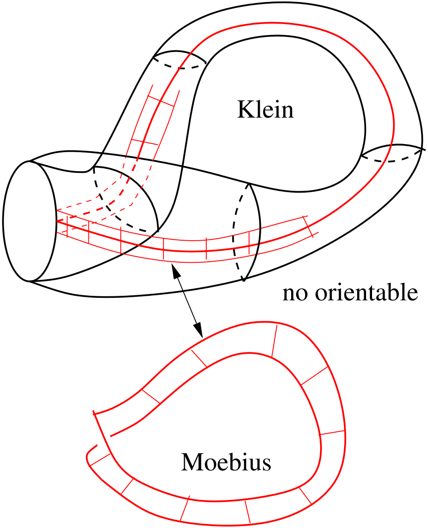
Una superficie puede ser orientable o no orientable.

Diferencialmente, una superficie es orientable si puede ser cubierta por cartas $\{U_i\}$ cuyas funciones de transicion $h_{i,j}$ preservan orientacion (sus derivadas tienen determinante positivo).

Topológicamente, una superficie S es orientable (no orientable) si todo (algún) círculo C encajado en S tiene una vecindad tubular o regular homeomorfa a un anillo (a una banda de Moebius).



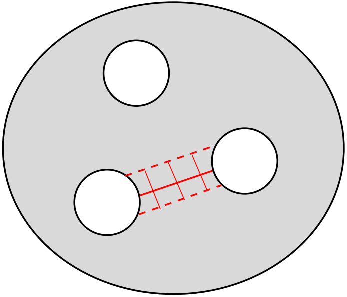
orientable



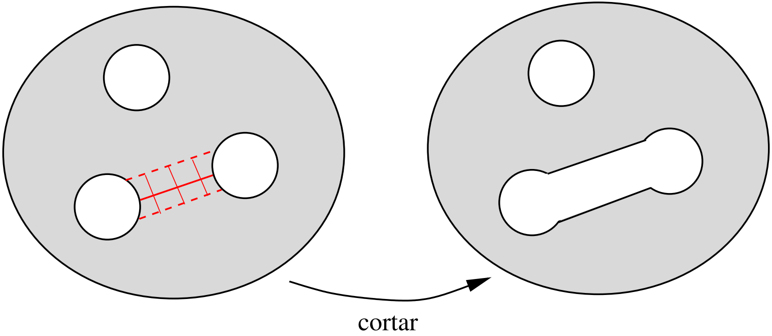
Superficies con frontera

Sea α un arco propiamente encajado en una superficie S ($\partial S \neq \emptyset$).

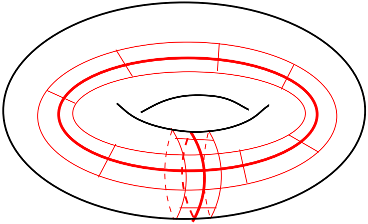
Toda vecindad tubular o regular de α (suficientemente pequeña) es homeomorfa a un producto de la forma $\alpha \times J$ donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, ya que dicha vecindad tubular es homeomorfa a una vecindad de la sección cero del haz normal N de α en S, y N es trivial pues α es contraible.



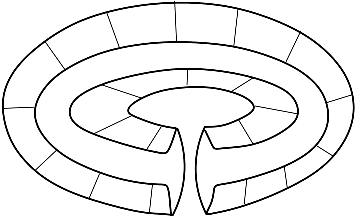
Podemos entonces *cortar a la superficie S a lo largo del arco* α*;* esta operación consiste en remover una vecindad regular abierta $\alpha \times (-1, 1) \subseteq S$ de α en S para obtener una nueva superficie S':



En general, para M una variedad (diferencial o PL) y $K \subseteq M$ podemos tomar una vecindad regular abierta $N(K) \subset M$ de K en M, y entonces $M \setminus N(K)$ es la variedad que resulta de *cortar a M a lo largo del subconjunto K*.



Toro

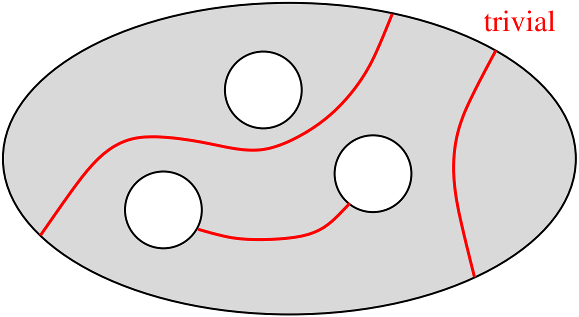


Disco

Arcos triviales, esenciales en superficies

Un arco $\alpha \subset S$ es trivial si α es *parallelo* a la frontera de S: existe un arco $\beta \subset \partial S$ con $\partial\alpha = \partial\beta$ que coborda un disco cerrado en S con α.

De otra forma, se dice que el arco $\alpha \subset S$ es no trivial o esencial.

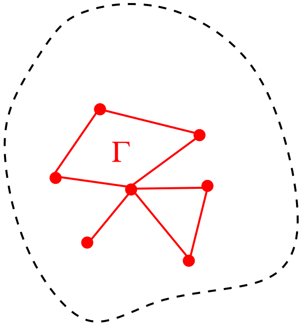


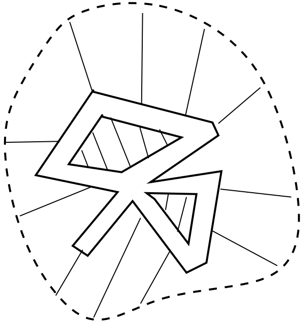
Característica de Euler

Una variedad es *cerrada* si es compacta y no tiene frontera.

Sea S una superficie cerrada y $\Gamma \subset S$ un grafo en S.

El grafo Γ consiste de un conjunto de vértices V, otro de aristas E, y un conjunto de *caras* F, que son las componentes de la superficie obtenida al cortar a S a lo largo de Γ.



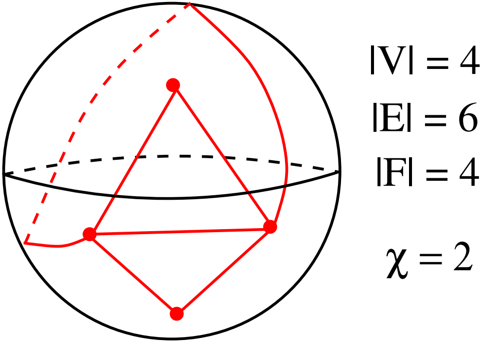


La característica de Euler $\chi(S)$ de la superficie S se define combinatoriamente como el número

$$\chi(S) = |V| - |E| + |F|$$

donde V, E, F son los conjuntos de vértices, aristas y caras de un grafo $\Gamma \subset S$ tal que cada cara es un disco cerrado.

Homológicamente, $\chi(S)$ es la suma alterna de los rangos de los grupos de homología entera de S.



Género de una superficie cerrada

El *género* $g(S)$ de la superficie S se define como el entero que satisface la siguiente relación:

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g(S) & \text{si } S \text{ no es orientable} \end{cases}$$

Topológicamente, en el caso orientable la superficie S se obtiene agregando $g(S)$ 1-asas a una 2-esfera con $2g(S)$ agujeros, mientras que en el caso no orientable S se obtiene agregando $g(S)$ bandas de Moebius a una 2-esfera con $g(S)$ agujeros.

Si Γ es un grafo en S con caras F, no necesariamente todas discos, entonces se satisface que

$$\chi(S) = |V| - |E| + \sum_{f \in F} \chi(F)$$

Principio de exclusión-inclusión

Si $S_1, S_2 \subseteq S$ son superficies entonces se satisface la identidad

$$\chi(S_1 \cup S_2) + \chi(S_1 \cap S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$

En particular, si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces

$$\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$$

Esta identidad se satisface con variedades de cualquier dimensión.

La característica de Euler es un invariante homotópico: espacios que son homotópicamente equivalentes tienen la misma característica de Euler.

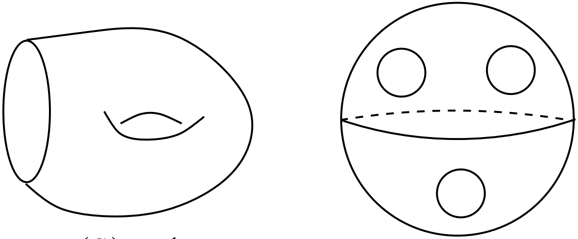
Si S es una superficie compacta con frontera, la *cerradura de S* es la superfice cerrada

$$\widehat{S} = S \cup_{\partial S} \mathcal{D}$$

donde $\mathcal{D}$ es una familia disjunta de $|\partial S|$ discos.

Definimos entonces el género de S como el número

$$g(S) = g(\widehat{S})$$



$\chi(S) = -1$
$g(S) = 1$

$\chi(P) = -1$
$g(P) = 0$

Ejemplo

Sea S un toro con un agujero y $A \subset S$ una familia disjunta de arcos propiamente encajados en S tal que al cortar a S a lo largo de A se obtiene un disco.
Se tiene entonces que $S = D \cup \overline{N(A)}$ donde D es un disco, y entonces

$$\chi(S) + \chi(D \cap \overline{N(A)}) = \chi(D) + \chi(\overline{N(A)})$$

$$\chi(S) + 2|A| = 1 + |A|$$

$$\chi(S) = 1 - |A| \implies |A| = 1 - \chi(S)$$

Por otro lado, $\widehat{S} = S \cup E$ donde E es un disco, asi que

$$\chi(\widehat{S}) + \chi(S \cap E) = \chi(S) + \chi(E)$$

$$0 + 0 = \chi(S) + 1 \implies \chi(S) = -1 \implies |A| = 2$$

Ejemplo

Sea S una superficie cerrada de género 2 y $C \subset S$ una familia de círculos encajados en S tales que al cortar S a lo largo de C se obtiene una union disjunta de pantalones $P = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_n$. Entonces $S = P \cup \overline{N(C)}$, asi que

$$\chi(S) + \chi(P \cap \overline{N(C)}) = \chi(P) + \chi(\overline{N(C)})$$

$$\chi(S) + 0 = -n + 0 \implies n = -\chi(S) = 2(2) - 2 = 2$$

Por otro lado, cada pantalón P_i tiene 3 círculos frontera de la colección C, asi que

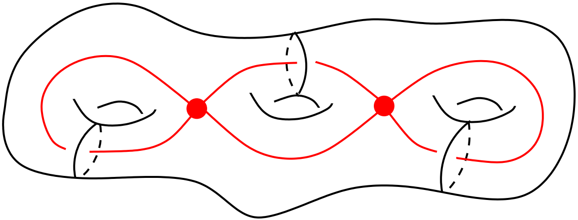
$$3n = 2|C| \implies |C| = 3n/2 = 3$$

Cubos con asas

Un cubo con asas es un espacio de dimensión 3, compacto y orientable, obtenido al agregar 1-asas a una bola cerrada de dimensión 3.

Alternativamente, un cubo con asas es un espacio homeomorfo a una vecindad regular cerrada de un grafo finito en $\mathbb{R}^3$.

El *género* de un cubo con asas es el número de 1-asas usado en su construcción, igual al género de su superficie frontera.

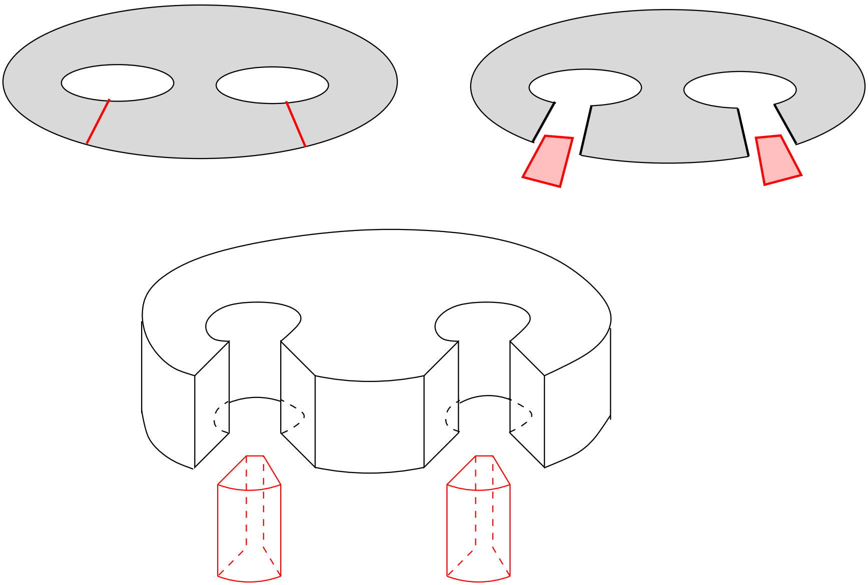


Ejemplo

Sea P un pantalón y $H = P \times I$, donde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Sean $a_1, a_2 \subset P$ arcos disjuntos propiamente encajados que cortan a P en un disco D, de tal forma que $P = D \cup \overline{N(a_1)} \cup \overline{N(a_2)}$.
Entonces

$$H = P \times I = D \times I \cup \overline{N(a_1)} \times I \cup \overline{N(a_2)} \times I$$

$D \times I$ es una bola cerrada de dimensión 3, asi cada producto $\overline{N(a_i)} \times I$ puede ser interpretado como una 1-asa que se pega a la bola $D \times I$. Se sigue que H es un cubo con 2 asas.



Ejercicios

(a) Sea S una superficie compacta y orientable con $r \geq 1$ agujeros y $A \subset S$ una familia disjunta de arcos propiamente encajados en S tal que al cortar a S a lo largo de A se obtiene un disco. Calcular $|A|$. Demostrar que existe tal familia de arcos A. Discutir el caso en el que S no es orientable.

(b) Sea S una superficie cerrada y orientable de género g y $C \subset S$ una familia de círculos encajados en S tales que al cortar S a lo largo de C se obtiene una union disjunta de pantalones $P = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_n$. Calcular $|C|$. Demostrar que existe tal familia de círculos C. Discutir el caso en el que S no es orientable. [*Sugerencia:* usar la identidad $P^2 \# P^2 \# P^2 = T^2 \# P^2$, donde T^2 es un toro cerrado y P^2 es un plano proyectivo.]

(c) Sea S una superficie compacta y orientable con $r \geq 1$ agujeros. Demostrar que $S \times I$ es un cubo con asas y encontrar su género. Concluir que si T es un toro con un agujero y P es un pantalón entonces $T \times I = P \times I$.