Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT)
Escuela de Nudos y 3-Variedades 2013

Mini-curso:
Superficies incompresibles y frontera incompresibles en exteriores de nudos en la 3-esfera.

II. Superficies en 3-variedades.

Luis G. Valdez Sánchez
University of Texas at El Paso

Transversalidad

la intersección $S \cap S'$ de dos superficies S, S' encajadas en una 3-variedad M^3 es transversal si para cada $p \in S \cap S'$ se satisface la identidad

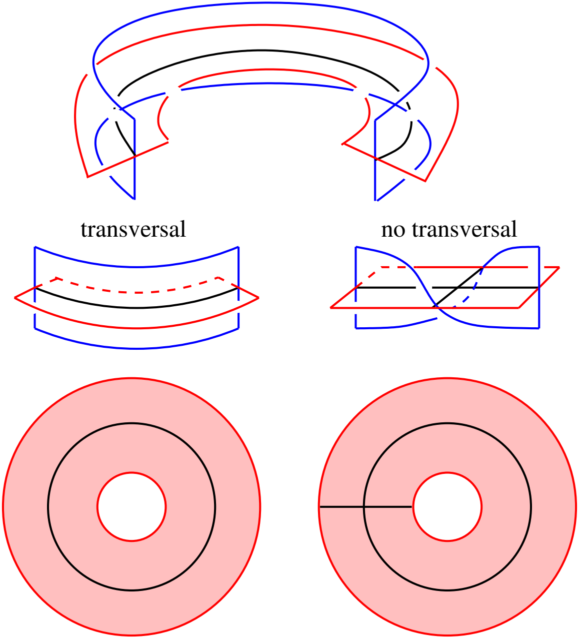
$$T_p M^3 = T_p S + T_p S',$$

donde $T_p X$ es el espacio tangente a la variedad X en el punto $p \in X$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\dim(T_p S \cap T_p S') &= \dim(T_p S) + \dim(T_p S') - \dim(T_p S + T_p S') \\
&= \dim(T_p S) + \dim(T_p S') - \dim(T_p M^3) \\
&= 2 + 2 - 3 = 1
\end{aligned}$$

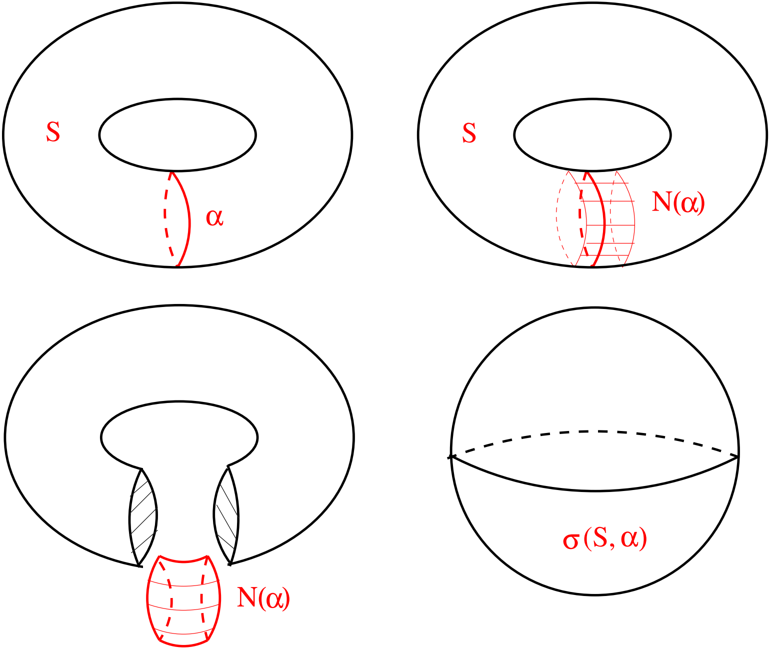
Si $S \cap \ S'$ es transversal entonces $S \cap S'$ es una subvariedad encajada en S y en S' con espacio tangente $T_p S \cap T_p S'$ en cada $p \in S \cap S'$, asi que $S \cap S'$ tiene dimensión 1.


transversal
no transversal

Cirugía en superficies

Sea α un círculo encajado en una superficie S con vecindad regular un anillo $A_\alpha \subset S$ (α preserva orientación).

Decimos que la superficie $\sigma(S, \alpha)$ obtenida al cortar S a lo largo de α y pegarle al resultado $S \setminus \operatorname{int} A_\alpha$ dos discos a los nuevos círculos frontera ∂A_α es el resultado de hacer cirugía a S a lo largo de α.


S
α
S
N(α)
N(α)
σ(S, α)

Ejercicio

Es aparente que la operación de ciruía reduce la *complejidad* de una superficie.

Encontrar la relación entre la carcterística de Euler y el género de las superficies S y $\sigma(S, \alpha)$; considerar los casos en que $\alpha \subset S$ separa o no separa a S.

Superficies compresibles

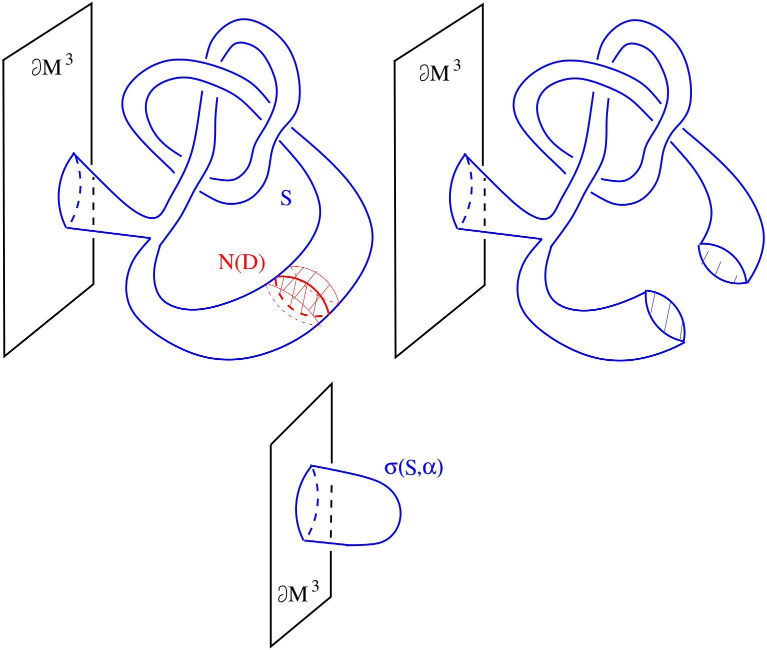
Una superficie S encajada en una 3-variedad M^3 es compresible (geométricamente) si existe un disco D encajado en M^3 tal que

(a) $D \cap S = \partial D$,

(b) ∂D es un círculo no trivial en S

Decimos que D es un disco de compresión de S, y que S se comprime a lo largo de la curva $\partial D \subset S$.

Necesariamente, el círculo $\partial D \subset S$ preserva orientación en S, es decir la vecindad regular de $\partial D \subset S$ en S es un anillo.


∂M 3
S
N(D)
∂M 3
∂M 3
σ(S,α)

Sea D un disco de compresión de la superficie $S \subset M^3$.

Existe una vecindad regular cerrada $N(D) = D \times [-1, 1]$ de D en M^3, con $D = D \times \{0\}$, tal que $S \cap N(D) = \partial D \times [-1, 1]$ es una vecindad regular cerrada de ∂D en S.

Entonces la superficie

$$S' = [S \setminus \partial D \times (-1, 1)] \cup D \times \{-1, 1\}$$

está propiamente encajada en M^3, y decimos que S' se obtiene de *comprimir a S en M^3 a lo largo del disco D*.

La superficie S' es homeomorfa a la superficie $\sigma(S, \partial D)$ obtenida por medio de cirugía en S a lo largo de ∂D.

Superficies incompresibles

Decimos que la superficie $S \subset M^3$ es incompresible en los siguientes casos:

(a) S es un disco y $\partial D \subset \partial M$ es no trivial en ∂M,

(b) S es una 2-esfera que no bordea una 3-bola en M^3,

(c) $S \neq D^2, S^2$ y S no admite discos de compresión en M^3.

Teorema del lazo Sea $S \neq D^2, S^2$ una superficie encajada en una 3-variedad, con S y M orientables. Entonces S es incompresible en M^3 si y solo si S es π_1-inyectiva en M^3, es decir, si la función $\pi_1(S) \to \pi_1(M^3)$ inducida por la inclusión $S \subset M^3$ es inyectiva.

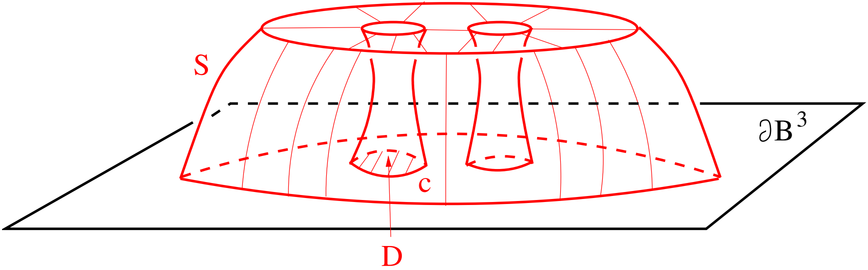
Ejemplo: Superficies en una 3-bola

Si B^3 es una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$ y $S \neq D^2, S^2$ es una superficie en B^3, entonces S se comprime en B^3.

Argumento algebráico:
El reultado se sigue del teorema del lazo, ya que si $S \neq D^2, S^2$ entonces $\pi_1(S) \neq \{1\}$, mientras que $\pi_1(B^3) = \{1\}$.

Argumento geométrico, parcial:

En el caso $\partial S \neq \emptyset$ no es necesario usar el teorema del lazo, pues aquí podemos encontrar una componente $c \subset \partial S$ que bordea un disco D en la esfera ∂B^3 tal que $S \cap \operatorname{int} D = \emptyset$; puesto que $S \neq D^2, S^2$, el círculo c es no trivial en S, asi que D es un disco de compresión para S en B^3.



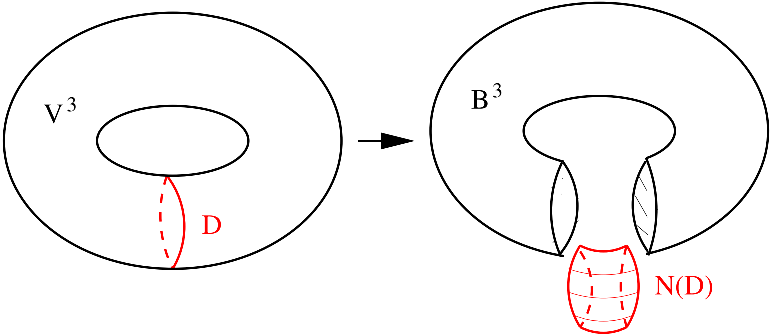
Ejemplo: Superficies en un toro sólido

Sea $V^3 = S^1 \times D^2$ un toro sólido y $S \neq D^2, S^2, A^2$ una superficie en V^3; entonces S se comprime en B^3.

Argumento algebráico:
El resultado se sigue del teorema del lazo, ya que para $S \neq D^2, S^2, A^2$ el grupo $\pi_1(S)$ es libre de rango ≥ 2 si $\partial S \neq \emptyset$, y no es libre cuando S es cerrada; puesto que $\pi_1(V^3) = \mathbb{Z}$ es libre de rango 1, la función $\pi_1(S) \to \pi_1(V^3)$ no puede ser inyectiva.

Argumento geométrico:
De entre los discos meridianos del toro sólido V^3 que intersecan a S transversalmente, sea D un disco meridiano tal que el número de components $|D \cap S|$ es mínimo.

Si $D \cap S = \emptyset$ entonces S se encuentra en la variedad obtenida al cortar a V^3 a lo largo del disco meridiano D, es decir, $S \subset B^3 \subset V^3$ para alguna bola B^3, asi que por el ejemplo anterior S se comprime en B^3.



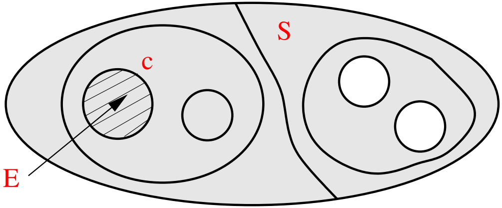
Si $D \cap S \neq \emptyset$ entonces $S \cap D$ es una subvariedad de dimensión 1 propiamente encajada en S y en D, asi que cada componente de $S \cap D$ es un arco o un círculo.

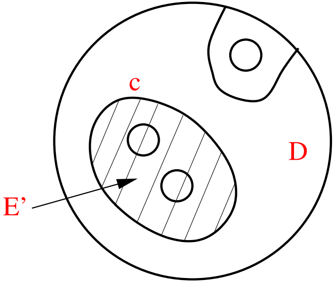
CASO 1: $S \cap D$ tiene componentes circulares.

Subcaso 1.A: alguna componente de $S \cap D$ es trivial en S.

Sea $c \subset S \cap D \subset S$ una componente circular trivial en S.

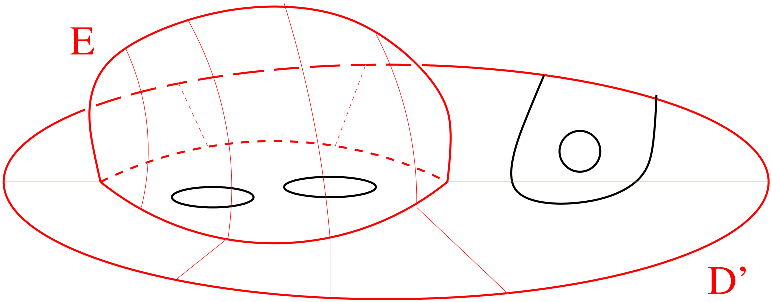
Entonces podemos asumir que c bordea un subdisco $E \subset S$ con $D \cap \operatorname{int} E = \emptyset$.





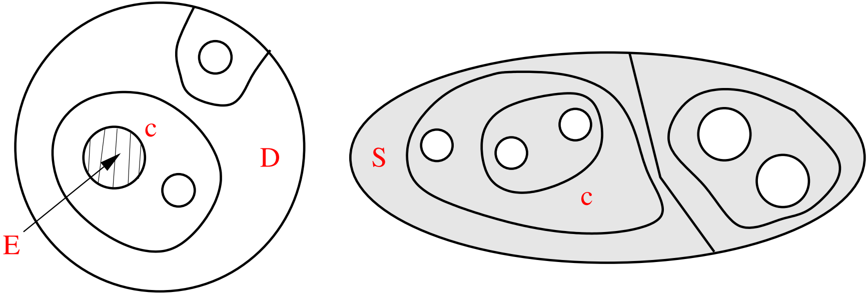
Como c también bordea un disco E' en D entonces $D \cap \operatorname{int} E = \emptyset$ implica que $F = E \cup E'$ es una 2-esfera encajada en V^3.

Entonces al hacer cirugía a D a lo largo de c usando el disco $E \subset S$ podemos construir un nuevo disco meridiano D' de V^3 con $\partial D' = \partial D$ tal que $|D' \cap S| < |D \cap S|$, lo que contradice la minimalidad de $|D \cap S|$. Por lo tanto este subcaso no ocurre.



Subcaso 1.B: cada componente circular de $S \cap D$ es no trivial en S.

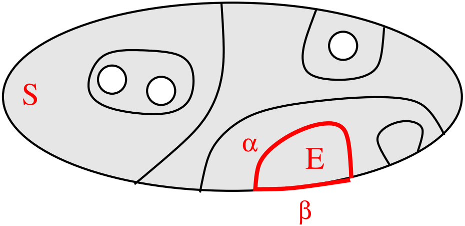
Sea $c \subset S \cap D$ una componente circular que bordea un disco $E \subset D$ tal que $S \cap \operatorname{int} E = \emptyset$. Entonces E es un disco de compresión de S en V^3, asi que en este subcaso S es compresible.

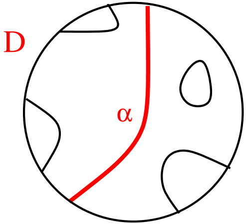


CASO 2: cada componente de $S \cap D$ es un arco.

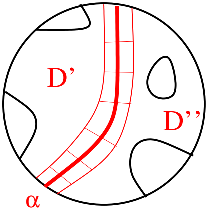
Subcaso 2.A: alguna componente arco de $S \cap D$ es trivial en S.

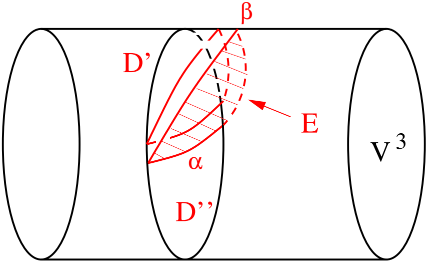
Sea $\alpha \subset S \cap D$ un arco que es trivial en S; podemos asumir que α corta a S en 2 componentes una de las cuales es un disco $E \subset S$ con $D \cap \operatorname{int} E = \emptyset$ y $\partial E = \partial\alpha \cup \partial\beta$, donde $\beta \subseteq \partial S$ es un arco tal que $\alpha \cap \beta = \partial\alpha \cap \partial\beta$.

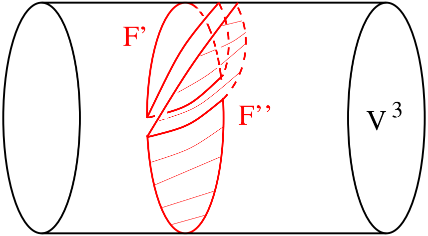




Entonces podemos cortar a D a lo largo de α en dos partes D' y D'' y construir dos nuevos discos $F' = D' \cup E$ y $F'' = D'' \cup E$ propiamente encajados en V^3.





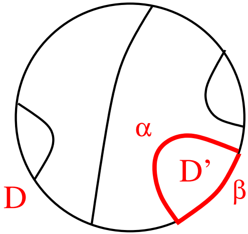


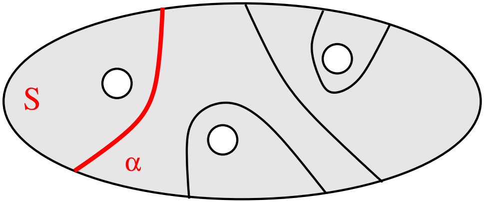
Pero entonces uno de los discos F', F'' , digamos F'', es un disco meridiano de V^3 tal que $|F'' \cap S| < |D \cap S|$, lo que contradice la minimalidad de $|D \cap S|$. Asi que este subcaso no ocurre.

Subcaso 2.B: cada arco de $S \cap D$ es no trivial en S.

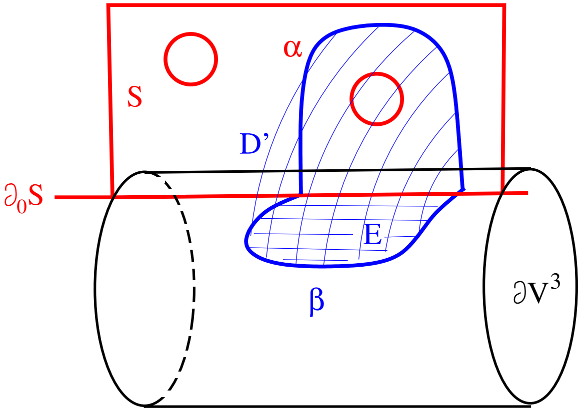
Sea α un arco de $S \cap D \subset D$ que corta a D en 2 subdiscos D', D'' con $S \cap \operatorname{int} D' = \emptyset$.

Entonces $\partial D' = \alpha \cup \beta$ donde $\beta \subset \partial D'$ es un arco tal que $\alpha \cap \beta = \partial\alpha \cap \partial\alpha$.

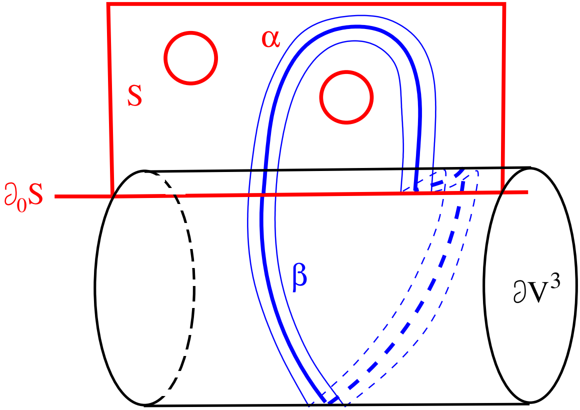




Supongamos que $\partial\alpha \subset \partial_0 S$ para alguna componente $\partial_0 S$ de ∂S y el arco $\beta \subset \partial D'$ es *paralelo* en ∂V^3 a un subarco γ de $\partial_0 S$ via un disco $E \subset \partial V$; entonces el disco $D' \cup E$ comprime a S a lo largo del círculo $\alpha \cup \gamma \subset S$, el cual es no trivial en S al ser α un arco no trivial en S.

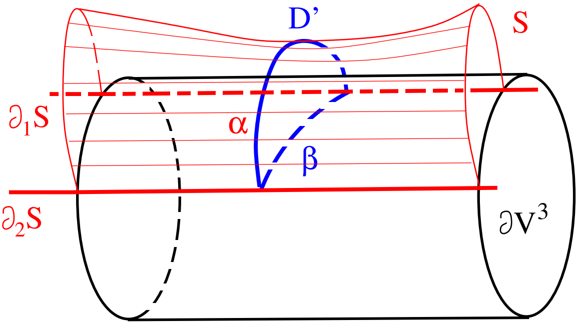


El caso en el que $\partial\alpha \subset \partial_0 S$ para alguna componente $\partial_0 S$ de ∂S y el arco $\beta \subset \partial D'$ *no es paralelo* en ∂V^3 a ∂S_0 no puede ocurrir: al ser S orientable, la vecindad regular del círculo $\alpha \cup \beta$ en $S \cup \partial V^3$ es una banda de Moebius, mientras que dicha vecindad regular coincide con el anillo $(\partial D) \times I$.



Por último, supongamos que los puntos extremos de $\partial\beta$ yacen en componentes distintas $\partial_1 S$ y $\partial_2 S$ de ∂S.

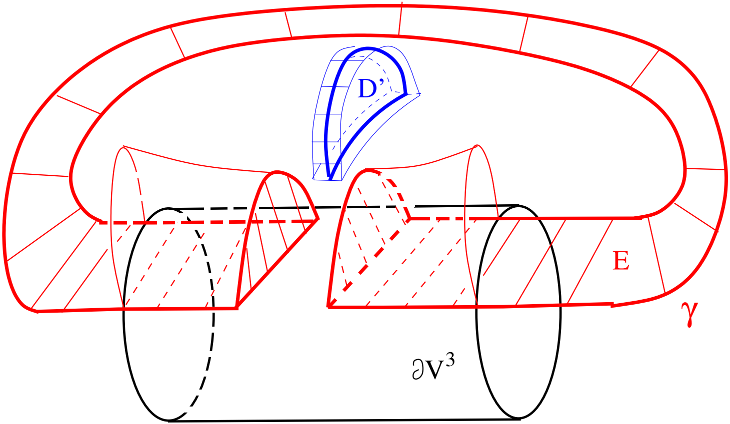
Entonces $\partial_1 S$ y $\partial_2 S$ son círculos paralelos en ∂V^3. Además podemos construir una vecindad regular $D' \times [-1,1]$ de D' en V^3 tal que $D' \times [-1,1] \cap S = \alpha \times [-1,1] \subset S$.



Cortando a S a lo largo del arco α usando una vecindad regular de D', podemos ver que el círculo

$$\gamma = \alpha \times \{-1, 1\} \cup [(\partial_1 S \cup \partial_2 S) \setminus \partial\beta \times \{-1, 1\} \subset S$$

bordea un disco E en V^3.



Si γ bordea un disco en S entonces S es un anillo (paralelo a ∂V^3 en V^3), lo que contradice la hipoótesis sobre S. Por lo tanto γ es esencial en S y E comprime a S a lo largo de γ.

Concluimos que en todos los casos posibles la superficie S se comprime en el toro sólido V^3.

Frontera-compresión

Sea S una superficie con frontera propiamente encajada en una 3-variedad M^3, con S y M^3 orientables.

Decimos que un disco D encajado en M^3 tal que

(a) $\partial D \subset S \cup \partial M^3$,

(b) $S \cap \operatorname{int} D = \emptyset$,

(c) $\partial D \cap S = \alpha$ es un arco no trivial en S,

(d) $\partial D \cap \partial M^3 = \beta$ es un arco no paralelo a ∂S en ∂M^3

es un disco de frontera compresión para S en M^3, y que S se frontera-comprime en M^3 a lo largo del arco $\alpha \subset S$.

El demostración del último caso anterior muestra que si S es frontera compresible en un toro sólido entonces S es compresible o S es un anillo parallelo a la frontera.

(a) Sea S una superficie orientable y con frontera, propiamente encajada en una variedad orientable M^3 con frontera ∂M^3 un toro. Demostrar que si S es frontera compresible en M^3 entonces S es compresible o S es un anillo.

(b) Sea H^3 un cubo con n asas, $n \geq 1$. Un sistema completo de discos para H^3 es una famila disjunta de discos $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ propiamente encajados en H^3 cuya unión corta a H^3 en una 3-bola.

Sea S una superficie orientable con frontera propiamente encajada en H^3. Para un sistema de discos $\mathcal{D}$ de H^3 tal que $\cup\mathcal{D}$ interseca a S transversalmente, sea

$$c(\mathcal{D}) = |S \cap (\cup\mathcal{D})| = |S \cap D_1| + |S \cap D_2| + \cdots + |S \cap D_n|$$

la *complejidad* de $\mathcal{D}$.

Demostrar que si el sistema de discos $\mathcal{D}$ interseca a S transversalmente, entonces entonces existe un sistema de discos $\mathcal{D}'$ que interseca a S transversalmente tal que $c(\mathcal{D}') < c(\mathcal{D})$.

Concluir que toda superficie con frontera, orientable y propiamente encajada en un cubo con asas es compresible o frontera compresible.