Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT)
Escuela de Nudos y 3-Variedades 2013

Mini-curso:
Superficies incompresibles y frontera incompresibles
en exteriores de nudos en la 3-esfera.

IV. Nudos y superficies.

Luis G. Valdez Sánchez
University of Texas at El Paso

Variedades irreducible

Una 3-variedad M^3 es irreducible si cada 2-esfera encajada DIFF, PL o TOP-localmente-plana en M^3 bordea una 3-bola en M^3. De otra forma M^3 es reducible.

$\mathbb{R}^3$ y S^3 son irreducibles.

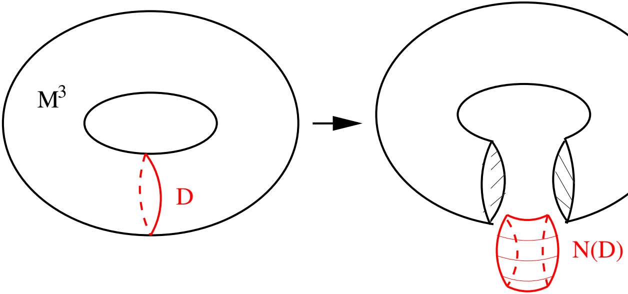
$S^2 \times S^1$ y $S^2 \times I$ son reducibles.

Ejemplo

Si M^3 es una 3-variedad irreducible (cpt, orientable, conexa) con frontera un toro que se comprime en M^3, entonces M^3 es un toro sólido.

Sea D un disco de compresión en M^3 del toro ∂M^3. Al comprimir a M^3 a lo largo de D se obtiene una 2-esfera que necesariamente bordea una 3-bola B^3 en M^3 disjunta de $N(D)$.

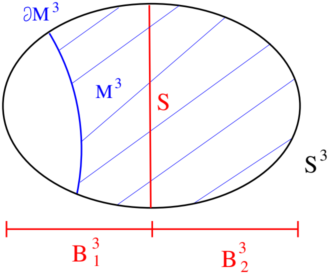
Por lo tanto $M^3 = N(D) \cup B^3$, asi que M^3 es un cubo con una asa = toro sólido.



Ejemplo

Toda 3-variedad $M^3 \subset S^3$ compacta, conexa y con frontera conexa es irreducible.

Sea S una esfera en M^3; entonces S separa a S^3 en dos bolas B_1^3, B_2^3 tales que $S^3 = B_1^3 \cup_S B_2^3$.



Exterior de un nudo en S^3

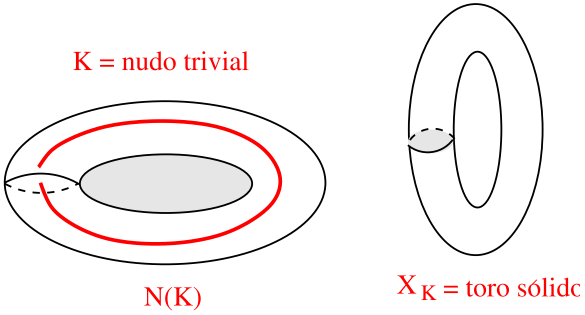
Un nudo en S^3 es un círculo encajado en S^3.

El exterior de un nudo $K \subset S^3$ es el espacio

$$X_K = S^3 \setminus \operatorname{int} N(K).$$

donde $N(K)$ es una vecindad regular de K en S^3.

X_K es una 3-variedad compacta, orientable, con frontera el toro $\partial N(K)$, por lo que X_K es también irreducible.



Para todo nudo $K \subset S^3$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *K es trivial,*

(b) *X_K es un toro sólido,*

(c) $\pi_1(X_K) = \mathbb{Z}$*,*

(d) *el toro ∂X_K se comprime en X_K.*

$(a) \implies (b)$: hecho.

$(b) \implies (c)$: si X_K es un toro sólido entonces su frontera ∂X_K se comprime en X_K via un disco meridiano de X_K.

$(c) \implies (d)$: se sigue por el teorema del lazo , pues el morfismo $\pi_1(\partial X_K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = \pi_1(X_K)$ no es inyectivo.

$(d) \implies (a)$: usando los ejemplos anteriore se puede ver que X_K es irreducible, y que si el toro ∂X_K se comprime en X_K entonces X_K es un toro sólido.

El disco meridiano D de X_K corta a X_K en una 3-bola B^3, asi que tenemos

$$S^3 = N(K) \cup [N(D) \cup B^3]$$

lo que implica que (Van Kampen)

$$\{1\} = \pi_1(S^3) = \pi_1(N(K) \cup N(D)).$$

Por otro lado, si el círculo ∂D da $n \geq 1$ vueltas alrededor del toro sólido $N(K)$ entonces $\pi_1(N(K) \cup N(D)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Van Kampen), asi que $n = 1$.

Por lo tanto D se puede extender a través de $N(K)$ a un disco con frontera K, por lo que K es trivial.

Ejemplo

Sea M^3 una variedad (cpt, orientable, conexa) y F una superficie orientable (conexa o no) propiamente encajada en M^3 con vecindad regular $N(F) \subset M^3$.

(a) *Si F es incompresible en M^3 entonces $\overline{M^3 \setminus N(F)}$ es irreducible si y solo si M^3 es irreducible.*

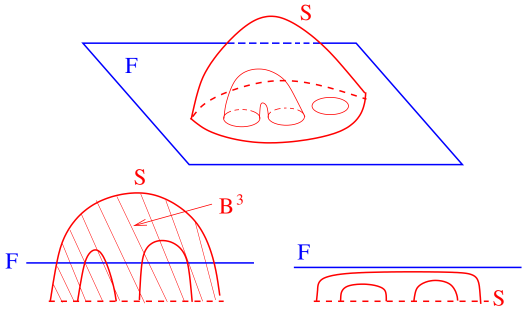
$\Longrightarrow$ *Irreducibilidad se propaga a través de superficies incompresibles.*

Sea M^3 irreducible. Si S es una esfera en $M^3 \setminus F$ entonces S bordea una bola $B^3 \subset M^3$. Si alguna componente de F es subconjunto de B^3 entonces dicha componente se comprime en B^3 y por lo tanto en M^3, contradiciendo la hypótesis. Se sigue que $B^3 \subset M^3 \setminus F$, asi que $\overline{M^3 \setminus N(F)}$ es irreducible.

Suponemos ahora que $\overline{M^3 \setminus N(F)}$ es irreducible y S una 2-esfera en M^3. Es posible isotopar a S en M^3 de tal manera que la intersección $S \cap F$ sea transversal con el menor número de componentes posibles.

Supongamos que $S \cap F \neq \emptyset$. Sea c una componente de $S \cap F$ que bordea un disco $E \subset S$ tal que $F \cap \operatorname{int} E = \emptyset$. Si c es no trivial en F entonces E es un disco de compresión para F en M^3, lo que contradice la incompresibilidad de F. Por lo tanto c es trivial en F y bordea un subdisco $E' \subset F$. La unión $E \cup F$ es una 2-esfera en la cerradura de una de las componentes de $M^3 \setminus F$ y bordea ahi una 3-bola B^3.

Podemos entonces isotopar a S usando la bola B^3 para deshacernos de las componentes de $S \cap F$ contenidas en $E' \subset F$:



Esto contradice la minimalidad de $|S \cap F|$ y por lo tanto se debe tener que $S \cap F = \emptyset$.

$\implies S \subset \overline{M^3 \setminus N(F)} =$ irreducible

$\implies S$ bordea una 3-bola en $\overline{M^3 \setminus N(F)}$

$\implies S$ bordea una 3-bola en M^3.

(b) Si para cada componente N^3 de $\overline{M^3 \setminus N(F)}$ la superficie $(\partial N^3) \cap N(F) \subseteq \partial N^3$ es incompresible en N^3 entonces F es incompresible en M^3.

$\Longrightarrow$ *Incompresibilidad se preserva pegando a lo largo de subsuperficies incompresibles de la frontera.*

Sea D un disco de compresión para F en M^3. Como F y M^3 son orientables, se tiene $N(F) = F \times I \subset M^3$, y por lo tanto es posible isotopar a D para que

$$D \cap N(F) = D \cap (F \times I) = (\partial D) \times I \subset D$$

Por lo tanto $D' = D \cap \overline{M^3 \setminus N(F)}$ es un disco propiamente encajado en alguna componente N^3 de $\overline{M^3 \setminus N(F)}$ que comprime la parte $(\partial N^3) \cap N(F)$ de ∂N^3.

Ejercicios

(a) $M^3 = V_1 \cup_A V_2$ donde V_1, V_2 son toros sólidos pegados a lo largo de un anillo $A = V_1 \cap V_2 = \partial V_1 \cap \partial V_2$.

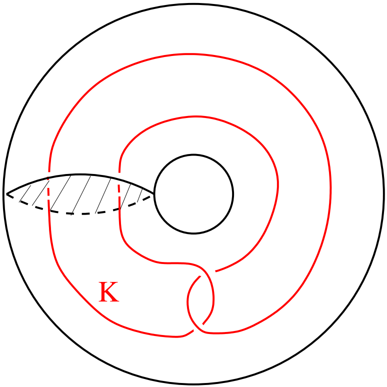
Demostrar que si A da por lo menos 2 vueltas alrededor de V_1 y V_2 entonces M^3 es irreducible y ∂M^3 es incompresible en M^3.

(b) Generalizar la parte (a) reemplazando V_1 con una 3-variedad irreducible (cpt, orientable conexa) cuya frontera ∂V_1 es incompresible en V_1.

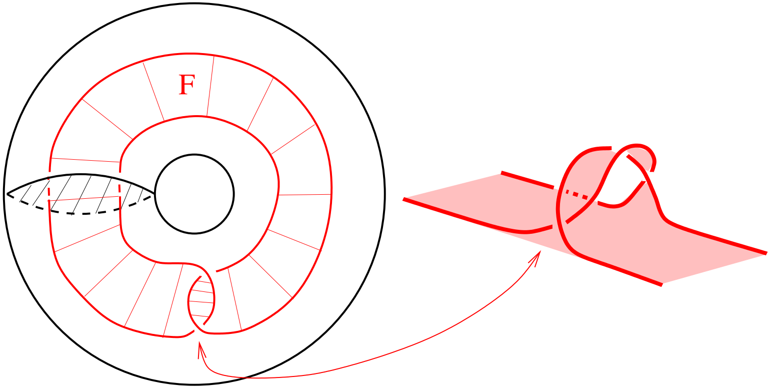
I. Nudos en un toro sólido.

Decimos que un nudo K en un toro sólido $V^3 = S^1 \times D^2$ es no trivial si K no es un alma de V^3 y no esta contenido en ninguna 3-bola de V^3.

Ejemplo: El nudo de Whitehead es no trivial:



Observemos que K bordea un toro con un agujero $F \subset V^3$:



Sea $V_K = \overline{V^3 \setminus N(K)}$ el exterior de K en V^3; $\partial V_K = \partial V^3 \cup \partial N(K)$.

De entre todos los discos meridianos que intersecan a K transversalmente, sea D un disco tal que $|D \cap K|$ es mínimo; notemos que $|D \cap K| \leq 2$.

CASO 1: $|D \cap K| = 0$

Entonces D, igual que F, esta propiamente encajado en V_K con $\partial D \subset \partial V^3$ y podemos isotopar a D de tal forma que interseque a F transversal y mínimamente en una colección de círculos.

Puesto que F contiene almas de V^3, necesariamente $D \cap F \neq \emptyset$.

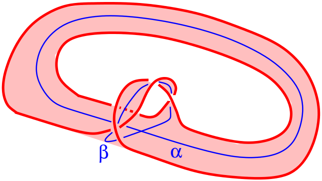
Como cualquier círculo en D bordea un subdisco en D, existe una componente $c \subset D \cap F$ que bordea un disco $E \subset D$ tal que $F \cap \operatorname{int} E = \emptyset$.

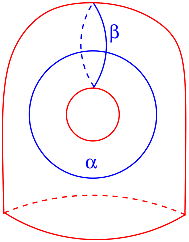
Se sigue que el disco E comprime al toro F a lo largo del círculo $c = \partial E \subset F$.

Usando el marco α, β de F se puede representar al círculo $c \subset F$ por medio de la suma homológica

$$c = p\alpha + q\beta$$

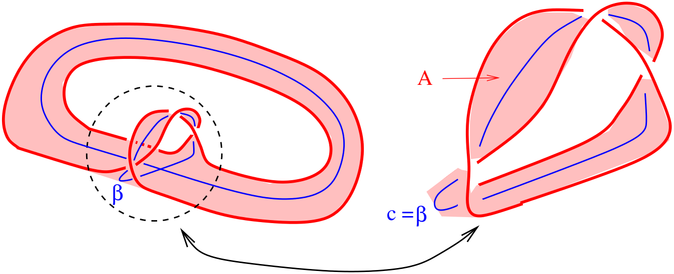
donde p, q son enteros primos relativos.





Como β bordea un disco en V^3 y α es un alma de V^3, se sigue que $c = p \cdot \alpha$ en $\pi_1(V^3) = \alpha\mathbb{Z}$.
Puesto que c bordea al disco E en $V_K \subset V^3$, concluimos que $p = 0$ y $q = \pm 1$; es decir, $c = \beta$.

Pero entonces E es un disco de compresión para el anillo A cobordado por el enlace H de Hopf:



Pero al comprimir el anillo A con el disco E se produces dos discos disjuntos con frontera el enlace H, lo que implica que H es un enlace trivial, contradiciendo el hecho que el número de enlace de H es ± 1.

Esta contradicción muestra que este caso no ocurre.

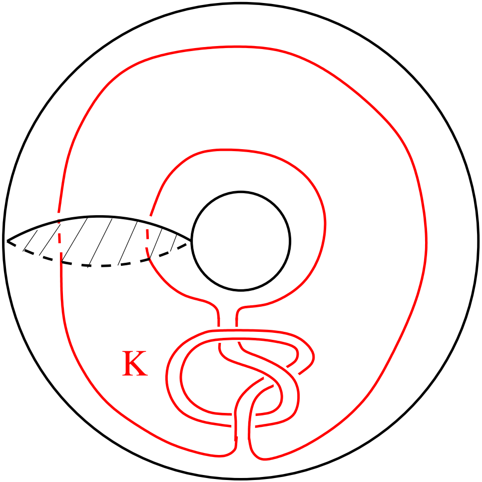
CASO 2: $|D \cap K| = 1$.

Entonces $K = \pm 1 \neq 0$ en $\pi_1(V^3) = \mathbb{Z}$, mientras que se tiene $K = 0$ en $\pi_1(V^3)$ según el disco meridiano de la definición de K; asi que este caso no ocurre.

Concluimos que $|D \cap K| = 2$, asi que K es no trivial en V^3.

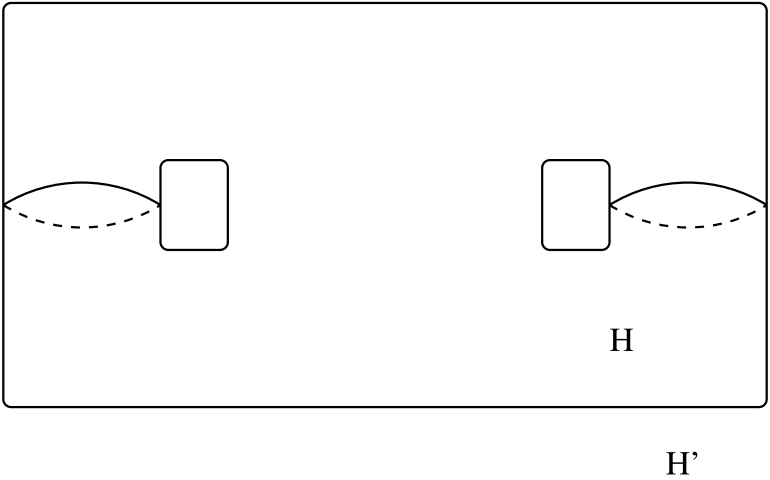
Ejercicio

Verificar que el nudo K es no trivial en el toro sólido.

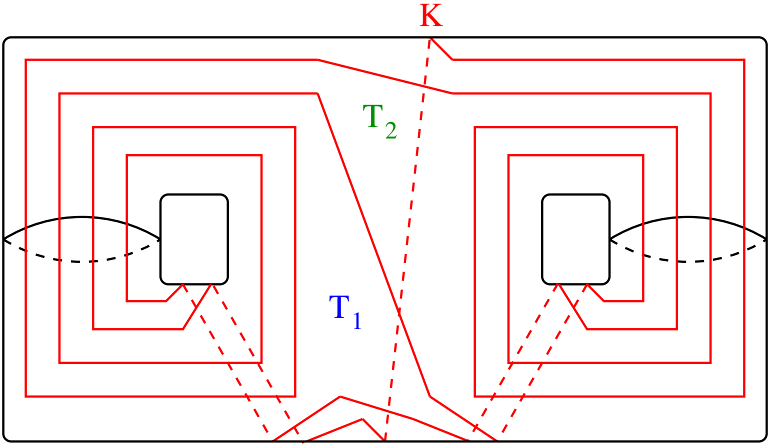


II. Un nudo no trivial $K \subset S^3$ de género 1 que bordea 2 toros de Seifert.

Comenzamos la construcción con una descomposición de Heegaard de $S^3 = H \cup H$ de género 2:

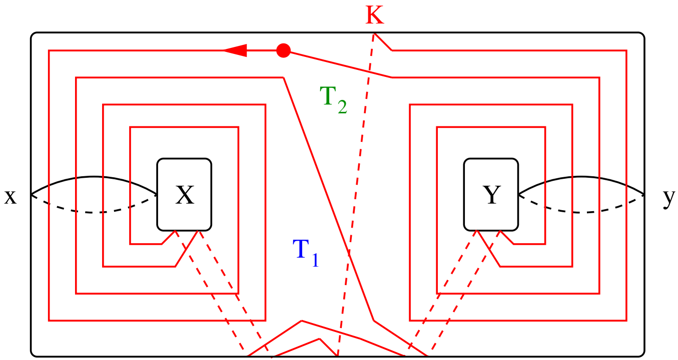


Dibujamos un nudo K sobre la superficie de Heegaard ∂H:



K separa a la superficie ∂H en dos toros con un agujero T_1, T_2.

Sean x, y los discos meridianos de H y X, Y los de H'; orientamos a K y calculamos:



en $\pi_1(H) = \langle x, y \rangle$: $K = x^2 y^2 \overline{x}^2\, \overline{y}^2 = [x^2, y^2] \neq 1$;

en $\pi_1(H') = \langle X, Y \rangle$: $K = XY\overline{X}\,\overline{Y} = [X, Y] \neq 1$;

$\Longrightarrow$ K es homotópicamente no trivial en H y H'

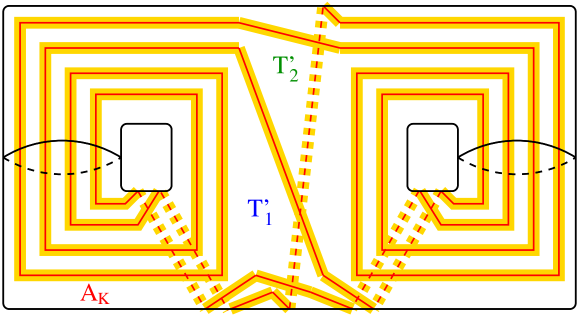
$\Longrightarrow$ K no bordea un disco en H ni en H'.

Si T_1 es compresible en H entonces T_1 se comprime en un disco en H con frontera K, lo cual no ses posible.

$\Longrightarrow$ Por lo tanto T_1 es incompresible en H.

$\Longrightarrow$ De manera similar T_2 es incompressible en H, y T_1, T_2 son incompresibles en H'.

Sea A_K una vecindad regular A_K de K en $\partial H = \partial H'$, y T_1', T_2' los toros con un agujero complementarios a A_K.

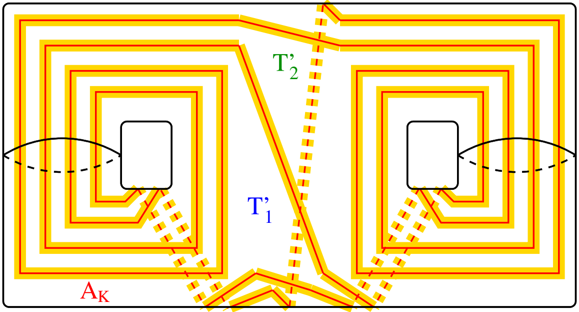


Entonces T_1', T_2' son incompresibles en H y en H'.

Como H y H' son irreducibles, se sigue que $X_K = H \cup_{T_1' \cup T_2'} H'$ es una variedad irreducible tal que los toros con agujero $T_1', T_2' \subset X_K$ son incompresibles en X_K.

$\implies$ X_K es un nudo no trivial de género 1.

Sea A_K una vecindad regular A_K de K en $\partial H = \partial H'$, y T_1', T_2' los toros con un agujero complementarios a A_K.



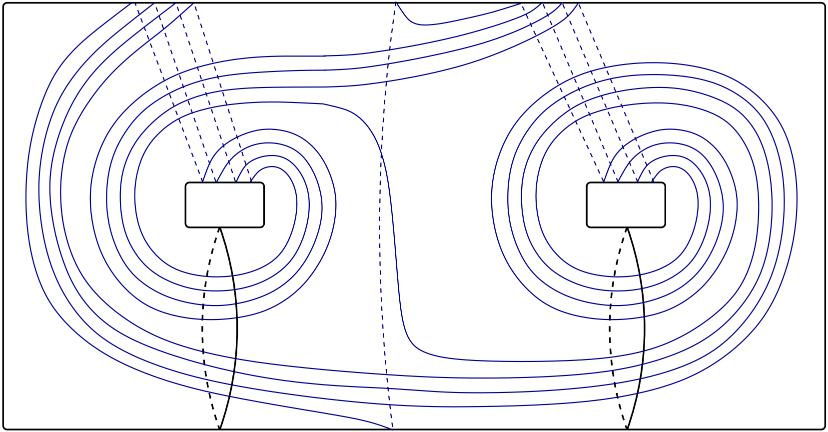
Entonces T_1', T_2' son incompresibles en H y en H'.

Como H y H' son irreducibles, se sigue que $X_K = H \cup_{T_1' \cup T_2'} H'$ es una variedad irreducible tal que los toros con agujero $T_1', T_2' \subset X_K$ son incompresibles en X_K.

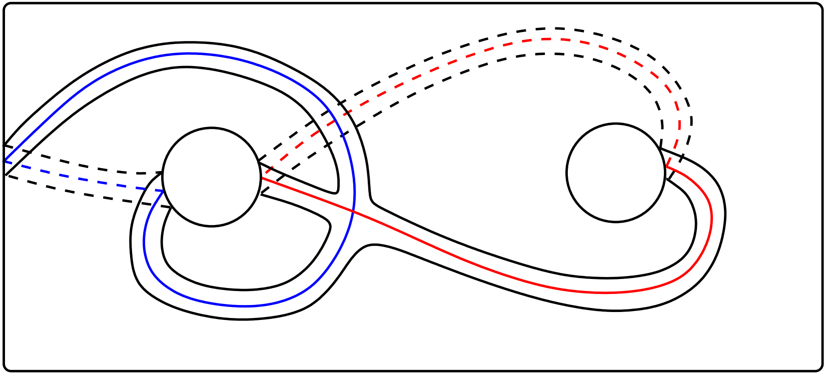
$\Longrightarrow$ X_K es un nudo no trivial de género 1.

PERO $K = [X, Y] \in \pi_1(H') \implies T_1', T_2'$ son paralelos en $H' \implies$ paralelos en X_K.

Este nudo es de género 1 y su exterior contiene 4 toros de Seifert disjuntos y no paralelos.



Este encaje del nudo 8 en la frontera del cubo con 2-asas muestra que el 8 es un nudo no trivial.



CopyRight Kikis