ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 1

1. Si X es un espacio normado, prueba que $d(x, y) \equiv \|x - y\|$ define una métrica en X .

Sea K un conjunto no vacío K . Para $f : K \rightarrow \mathbb{K}$ definamos

$$\|f\|_{\infty} \equiv \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

y observemos que $B(K) \equiv \{f : K \rightarrow \mathbb{K}, \|f\|_{\infty} < \infty\}$.

2. Prueba que $\|\cdot\|_{\infty}$ es una norma en $B(K)$.

3. Sea X un espacio normado. Si $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión convergente, prueba que es de Cauchy.

4. Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\} \subset X$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, prueba que converge.

5. Prueba que $\|f\|_1 \equiv \int_0^1 |f| dx$ es una norma en $C([0, 1])$.

6. Sea X un espacio de Banach y $V \subset X$ un subespacio. Prueba que V es completo si, y sólo si, V es cerrado.

7. Sean X y Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Prueba que T es continuo si, y sólo si, T es acotado.

8. Sean X y Y espacios normados. Prueba: i) La función

$$\|(x, y)\| \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$$

es una norma en $X \times Y$. ii) Si X y Y son completos, $X \times Y$ también lo es.

9. Sea A un álgebra y definamos en $A \times \mathbb{K}$

$$(x, \alpha)(y, \beta) \equiv (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta).$$

Prueba que, con esta operación como multiplicación, $A \times \mathbb{K}$ es un álgebra.

10. Sean A y B álgebras y $h : A \rightarrow B$ un homomorfismo (de álgebras). Prueba: i) $h(A)$ es una subálgebra de B . ii) Si A tiene unidad (multiplicativa), entonces $h(A)$ también la tiene.

Para revisar y entregarse el jueves 20 de agosto 14, 2009.