ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 2

Definición Sea V un espacio vectorial. Una función $N : V \to \mathbb{R}$ es una seminorma si tiene las propiedades de una norma, excepto que puede suceder $N(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.

1. Sean X y Y espacios vectoriales y $T : X \to Y$ un operador lineal. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma en Y y definamos

$$\|x\|_T \equiv \|Tx\|.$$

i) Prueba que $\|\cdot\|_T$ es una seminorma. ii) ¿Cuándo es una norma?

2. Sea K un conjunto no vacío y $f, f_n \in B(K)$. Verifica que $f_n \to f$ en $B(K)$ si, y sólo si, $f_n \xrightarrow{u} f$ (converge uniformemente).

3. Sea K un conjunto no vacío. Prueba que $B(K)$ es completo.

Sean X y Y espacios normados. Dado un operador lineal $T : X \to Y$ sea

$$\|T\| \equiv \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

y observemos que $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y, T \text{ lineal}, \|T\| < \infty\}$.

4. Prueba que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$.

5. Sea X un espacio de Banach. i) Si $v, w \in X$, prueba que existe $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T(v) = w$. ii) Estima la norma de T en términos de v y de w.

6. Sean X y Y espacios normados. Si $X \times Y$ es completo, prueba que X y Y también lo son.

7. Sea X un espacio vectorial, $\|\cdot\|_j$ una norma en X, y τ_j la topología determinada por $\|\cdot\|_j$, $j = 1, 2$. Prueba que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si, y sólo si, $\tau_1 = \tau_2$. Sea A un álgebra con unidad y $x, y \in A$. Prueba:

8. Si $x, yx \in G(A)$, entonces $y \in G(A)$.

9. Si $xy, yx \in G(A)$, entonces $x, y \in G(A)$.

10. Si $a = e - xy \in G(A)$, entonces $(e - yx)^{-1} = e + ya^{-1}x$.

Para revisar y entregarse el martes 1 de septiembre, 2009.