ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 3

1. Sean X y Y espacios normados. Si Y es completo, prueba que $\mathcal{L}(X,Y)$ es completo.

2. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal. Prueba: existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ si, y sólo si, T es 1-1 y $T^{-1} : R(T) \to X$ es continuo.

3. Sea X un espacio normado y $a, b \in X$. Prueba que la función $f : \mathbb{K} \to X$ definida por $f(\lambda) \equiv a - \lambda b$ es continua.

4. Sea X un espacio normado, $\varphi \in X^*$ y $a \in X$. Si$\varphi(a) \neq 0$, prueba que $X = N(\varphi) \oplus \mathcal{L}(a)$, siendo $\mathcal{L}(a)$ el subespacio de X generado por a.

Definición . El *exponente conjugado* de $p \in [1,\infty]$ es $q \in [1,\infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Sea $p \in (1,\infty)$ y q su exponente conjugado. Prueba que

$$xy \leq \tfrac{1}{p}x^p + \tfrac{1}{q}y^q, \ \forall\, x, y \geq 0.$$

6. Sea X un espacio de Banach. Si $\dim X \geq 2$, prueba que el álgebra $\mathcal{L}(X)$ no es conmutativa.

7. Sea D un conjunto no-vacío. Prueba que $f \in B(D)$ es invertible si, y sólo si, existe $r > 0$ tal que $|\, f(x)| \geq r, \ \forall\, x \in D$.

Definición Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un conjunto $M \subset A$ es un *ideal* (bilateral) si es subgrupo aditivo de A y cuando $y \in A, \ x \in M$, resulta que $yx, xy \in M$.

8. Sea A un álgebra con unidad. Si $M \subset A$ es un ideal, prueba que M es una subálgebra

9. Sean A y B álgebras. Si $h : A \to B$ es un homomorfismo, prueba que $h^{-1}(0)$ es un ideal en A.

10. Sea A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Prueba: i) $e^0 = e$. ii) Si x y y conmutan, entonces $e^{x+y} = e^x e^y$. iii) $e^x \in G(A), \ \forall\, x \in A$.

Para revisar y entregarse el martes 8 de septiembre, 2009.