ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 4

Definición Dado un espacio vectorial real V , definamos

$$V_{\mathbb{C}} \equiv \{x + iy : x, y \in V\}, \text{ siendo } i \equiv \sqrt{-1}.$$

1. Prueba que $V_{\mathbb{C}}$ con las operaciones

$$(x + iy) + (u + iv) \equiv x + u + i(y + v)$$

$$(a + ib)(x + iy) \equiv ax - by + i(ay + bx), \quad x, y \in V, a, b \in \mathbb{R}.$$

es un espacio vectorial complejo. Se le llama la *complejificación* de V .

Definición Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, definamos

$$\|x\|_p \equiv (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|x\|_{\infty} \equiv \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

2. Prueba que, para cada $p \in [1, \infty]$, la función $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$.

Definición . Sean X, Y y Z espacios vectoriales. Una función $B : X \times Y \rightarrow Z$ es *bilineal*, si, para cada $y \in Y$, la función $x \rightarrow B(x, y)$ es lineal y, para cada $x \in X$, la función $y \rightarrow B(x, y)$ es lineal.

3. Sean X, Y y Z espacios normados y $B : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal. Prueba que B es continua si, y sólo si, existe $C > 0$ tal que

$$\|B(x, y)\| \leq C\|x\|_p\|y\|_q, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

4. Sea E un espacio topológico, X y Y espacios normados, $f : E \rightarrow X \times Y$, $f = (g, h)$ y $p \in E$. Prueba que f es continua en p si, y sólo si, g y h son continuas en p .

5. Sea E un espacio topológico, $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ y $a \in E$. Si $f(x) \neq 0, \forall x \in E$ y f es continua en a , prueba que $\frac{1}{f}$ también es continua en a .

6. Sea A un álgebra. Si $\{A_{\alpha} : \alpha \in J\}$ es una familia no-vacía de subálgebras de A , prueba que $\bigcap_{\alpha \in J} A_{\alpha}$ es una subálgebra de A .

Definición Sea A un álgebra. Un elemento $x \in A$ es *nilpotente*, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

7. Encuentra un álgebra de Banach A y $x \in A \setminus \{0\}$ que sea nilpotente.

8. Sea E un espacio topológico no vacío. Si $f \in B(E)$, encuentra $\sigma(f)$.

9. Sea A un álgebra de Banach. Si $\varphi : A \rightarrow \mathbb{K}$ es un homomorfismo, prueba que $\varphi(x) \in \sigma(x), \forall x \in A$.

10. Sea K un conjunto compacto Hausdorff no vacío. Si $M \subset C(K)$ es un ideal y $\overline{M} \neq C(K)$, prueba que existe $a \in K$ tal que $f(a) = 0, \forall f \in M$. (Sug.: considera el teorema de Stone-Weierstrass.)

Para revisar y entregarse el jueves 17 de septiembre, 2009.