ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 5

Definición Dada una sucesión $s = \{s_n\} \subset \mathbb{K}$ definamos

$$\|s\|_p \equiv (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty; \quad \|s\|_\infty \equiv \sup\{|s_n|: n \in \mathbb{N}\}.$$

y

$$\ell^p \equiv \{s : \|s\|_p < \infty\}.$$

1. Prueba que ℓ^p es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ^p.

Definición Sea V un espacio vectorial real y W un espacio vectorial complejo. Dado un operador $T : V \to W$ que es $\mathbb{R}$-lineal, definimos su *complejificación* $T_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to W$ por $T_\mathbb{C}(x + iy) \equiv T(x) + iT(y)$.

2. Prueba que $T_\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal.

Definición Sea A un álgebra.
a) El *álgebra generada por* $B \subset A$ es $\mathcal{A}(B) \equiv \cap E$, donde la intersección se toma sobre todas las subálgebras $E \subset A$ tales que $B \subset E$.
b) Si A tiene identidad e, el *álgebra con identidad generada por* $B \subset A$ es el álgebra generada por $B \cup \{e\}$.

3. Sea A un álgebra con identidad y $x \in A$. Prueba que el álgebra con identidad generada por x es $\mathcal{A}(x) = \{P(x) : P \in \mathcal{P}\}$.

Definición . Sea A un álgebra. Dado $B \subset A$, definamos

$$\mathrm{Comm}(B) \equiv \{x \in A : xb = bx, \ \forall\, b \in B\}.$$

4. Sea A un álgebra de Banach y $B \subset A$. Prueba: i) $e \in \mathrm{Comm}(B)$. ii) $\mathrm{Comm}(B)$ es una subálgebra cerrada de A.

5. Si A es un álgebra de Banach y $x \in A$ es nilpotente, prueba que $\sigma(x) = \{0\}$.

6. Sea $f(z) = \frac{1}{z}, \ \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Desarrolla f en serie de potencias alrededor de cada $z_0 \neq 0$.

Definición Sea A un álgebra de Banach y $M \subset A$ un ideal cerrado. En el espacio vectorial cociente A/M definimos entonces $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$.

7. Prueba: i) Con la definición anterior se obtiene un producto en A/M. ii) Si $M \neq A$, entonces A/M es un álgebra de Banach.

Definición Sea A un álgebra con identidad. Un elemento $y \in A$ es *inverso por la izquierda* (inverso por la derecha) de $x \in A$, si $yx = e$ $(xy = e)$.

8. Sea $X \equiv \ell^2$ y $A \equiv \mathcal{L}(X)$. Para $s \in \ell^2$ definamos la sucesión Ts por $Ts(1) \equiv 0, Ts(n) = n - 1, \ \forall\, n \geq 2$. Prueba: i) $T \in A$. ii) T tiene inverso por la izquierda y no tiene inverso por la derecha.

9. Sea X un espacio de Banach y $A \equiv \mathcal{L}(X)$. Sea λ_j un valor propio de $T \in A$ y v_j un vector propio correspondiente, $j = 1, \ldots, n$. Si los λ_j son distintos entre sí, prueba que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

10. Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X), \lambda \in \mathbb{K}$ y $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\lambda \in \sigma(T)$ en los siguientes casos: i) Si $(T - \lambda I)x_n \to 0$. ii) Si $\lambda_n \to \lambda$ y $(T - \lambda_n I)x_n \to 0$.

Para revisar y entregarse el jueves 24 de septiembre, 2009.