ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 6

Definición Dado un espacio vectorial real X con norma $\|\cdot\|$, definamos en $V_{\mathbb{C}}$ la función $\|x+iy\|_{\mathbb{C}} \equiv \sup\{|\cos\theta|\ \|x\| + |\operatorname{sen}\theta|\ \|y\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

1. Prueba que $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ es una norma en $V_{\mathbb{C}}$. A $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ la llamaremos la complejificación de $\|\cdot\|$.

2. Consideremos el espacio normado $X_i \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i), i = 1, 2$, donde

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2},\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Definamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(x,y) \equiv (x, x+y)$ y tomemos $A_i \equiv \mathcal{L}(X_i)$. Verifica que $\|T\|_{A_1} \neq \|T\|_{A_2}$.

3. Sea A un álgebra con identidad y $x, y \in A$. Si xy es invertible y x, y conmutan, prueba que x es invertible.

4. Prueba que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2}$, es holomorfa. (Sug.: observa que $\frac{1}{1+\lambda^2} = \frac{1}{\lambda+i)(\lambda-i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-i} + \frac{1}{\lambda+i}\right)$).

5. Muestra que el teorema de Liouville no es válido para funciones holomorfas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Sea A un álgebra y $x \in A$. Si $\dim A < \infty$ y x tiene inverso por la izquierda (derecha), prueba que x es invertible. (Sug.: considera el operador $R_x(u) \equiv ux$.)

7. Prueba que el grupo de operadores invertibles es denso en $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

8. Definamos $n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{N}_0$ por $n(T) \equiv \dim N(T)$. Determina si n es continua.

9. Sea X un espacio de Banach complejo, B una subálgebra de Banach de $\mathcal{L}(X)$ y $T \in B$. Si $\sigma(T)$ tiene interior vacío, prueba que $\sigma_B(T) = \sigma(T)$.

Definición Sea A un álgebra. Un ideal $M \subset A$ es un *ideal maximal*, si $M \neq A$ y cuando $M \subset B \subset A$ y B es un ideal, se cumple que $B = M$ o $B = A$.

10. Sea K un conjunto compacto Hasdorff no vacío. Dado $a \in K$, definamos $M_a \equiv \{f \in C(K) : f(a) = 0\}$. Prueba que M_a es un ideal maximal de A.

El jueves 1 de octubre se realizará el examen parcial 1.
Para resolverse y entregarse el jueves 8 de octubre, 2009