ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 7

1. **Definición** Sea X un espacio vectorial real con norma $\|\cdot\|$. Definamos en $X_{\mathbb{C}}$ la función "parte real" $\pi(x+iy) \equiv x$ y

$$\|z\|_{\mathbb{C}} \equiv \sup\{\|\pi(e^{i\theta}z)\| : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

1. Prueba: i) $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ es una norma en $X_{\mathbb{C}}$, a la cual llamaremos la complejificación de $\|\cdot\|$. ii) La función $J : X \to X_{\mathbb{C}}$ definida por $x \to x + 0i$ es una isometría. iii) X es completo si, y sólo si, $X_{\mathbb{C}}$ lo es.

2. Sea $A \equiv M(2) \sim \mathbb{K}^4$. i) Determina si la norma $\|\cdot\|_\infty$ es submultiplicativa en A. ii) Si $M \in A$, prueba que $(\|M^n\|_\infty)^{\frac{1}{n}}$ existe.

3. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $p \in [0, \infty)$. Construye $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ tal que $\sigma(T) = K$.

4. Determina $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ para el operador lineal $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $T(x_1, x_2, \ldots) \equiv (x_2, x_3, \ldots)$.

5. Encuentra un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|T\| > r_\sigma(T) > 0$.

6. Sea A un álgebra de Banach compleja. Si existe un número $M > 0$ tal que $\|x\|\|y\| \leq \|xy\|$, $\forall\, x, y \in A$, prueba que A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$. (Sug.: Empieza probando que $\mathrm{Fr}\,(G(A)) = \{0\}$)

7. Encuentra un conjunto cerrado $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{co}(B)$ no es cerrado.

Definición Sea V un espacio vectorial y $A \subset V$.
a) A es *absorbente*, si para cada $x \in V$ existe $t > 0$ tal que $tx \in A$.
b) El funcional de Minkowski de un conjunto convexo y absorbente $A \subset E$ es $\rho_A(x) \equiv \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}$.

8. Prueba que $\rho_A(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(tx) = t\rho(x), \forall\, x, y \in V$, $t \geq 0$.

Definición Una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos tiene la *propiedad de intersección finita*, si cualquier intersección finita $A_1 \cap \cdots A_n$, donde $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$, es no vacía.

9. Sea X un espacio topológico Hausdorff y $\mathcal{C} \equiv \{K_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección no-vacía de conjuntos compactos en X. Si $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita, prueba que $\cap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$.

10. Sea K un conjunto compacto Hausdorff no vacío. Si $M \subset C(K)$ es un ideal maximal, prueba que existe $a \in K$ tal que $M = \{f \in C(K) : f(a) = 0\}$.

Para revisar y entregarse el jueves 15 de octubre, 2009.