ÁLGEBRAS DE BANACH: Tarea 8

1. Sea X un espacio normado real. Si $T : X \rightarrow X$ es un operador lineal acotado, prueba que $T_{\mathbb{C}}$ también lo es y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.
2. Sea X un espacio de Banach complejo, $T \in \mathcal{L}(X)$ y P un polinomio. Si $P(T) = 0$ y $\lambda \in \sigma(T)$, prueba que $P(\lambda) = 0$.
3. Sea A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. i) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\lambda \neq 0$, prueba que $xy - \lambda e$ es invertible si, y sólo si, $yx - \lambda e$ lo es. (Sug.: ten presente el ejercicio 2.10.) ii) Proporciona un ejemplo donde xy sea invertible y yx no lo sea. iii) Si x es invertible, prueba que $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.
4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío, A un álgebra de Banach y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Prueba que $\varphi f : \Omega \rightarrow A$ es holomorfa.
5. Sea V un espacio vectorial. Si $I \neq \emptyset$ y $B_{\alpha} \subset V$ es convexo $\forall \alpha \in I$, prueba que $\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha}$ es convexo.
6. Sea V un espacio vectorial y $B \subset V$. Prueba que
$$\text{co}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j x_j : t_1, \dots, t_n \geq 0, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \text{ y } x_1, \dots, x_n \in B \right\}.$$
7. Sea X un espacio normado. Si $B \subset X$ es convexo, prueba que $\overline{B}$ también lo es.
8. Sea X un espacio normado. Si $B \subset X$, prueba que $\overline{\text{co}}(B) = \overline{\text{co}(B)}$.
9. Sea X un espacio normado. Si $B \subset X$ es totalmente acotado, prueba que $\overline{A}$ también lo es.
10. Sea A un álgebra de Banach. Si $M \subset A$ es un ideal maximal, prueba que M es cerrado.

Para revisar y entregarse el jueves 22 de octubre, 2009.