ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 9

1. ¿Puede un álgebra con identidad de dimensión 2 ser no conmutativa?.

2. Encuentra un ejemplo de un álgebra con identidad, cuya dimensión sea 2.

Notación Dada un álgebra A, denotaremos por $G_\ell(A)$ ($G_r(A)$) el subconjunto de A formado por los elementos con inverso lateral izquierdo (derecho).

3 Si A es un álgebra de Banach, prueba que $G_\ell(A)$ y $G_r(A)$ son abiertos.

Definición Sea A un álgebra de Banach. Un elemento $x \in A$ es *divisor topológico de cero*, si existe una sucesión $\{y_n\} \subset B_1(A)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} y_n x = 0 = \lim_{n\to\infty} x y_n.$$

4. Sea A un álgebra de Banach. Si $x \in \mathrm{Fr}\,(G(A))$, prueba que x es un divisor topológico de cero.

Notación $S^1 \equiv \{z \in \mathbb{C} :\mid z\mid = 1\}$.

5. Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si T es una isometría suprayectiva, prueba que $\sigma(T) \subset S^1$.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, X un espacio de Banach, $f : \Omega \to X$ y $\lambda_0 \in \Omega$. Si f tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de λ_0, prueba que dicho desarrollo es único.

7. (Teorema de Liouville vectorial.) Sea X un espacio de Banach complejo. Si $f : \mathbb{C} \to A$ es una función holomorfa y acotada, prueba que f es constante.

8. Sea A un álgebra de Banach compleja. Si existe un número $M > 0$ tal que $\|vyv^{-1}\| \leq M\|y\|,\ \forall\, y \in A,\ v \in G(A)$, prueba que A es conmutativa. (Sug.: considera la función $g(\lambda) \equiv e^{\lambda x} y e^{-\lambda x},\ x, y \in A$.)

9. Sea B la subálgebra cerrada con identidad generada en $C(S^1)$ por $f(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in S^1$. i) Prueba que $\frac{1}{f} \notin B$. (Sug.: considera el teorema del módulo máximo.) ii) Encuentra $\sigma(f)$ y $\sigma_B(f)$.

10. Sea X un espacio de Banach y $B \subset X$ un conjunto acotado. Si $\{x_n\} \subset B$ y $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in \overline{\mathrm{co}}(B)$.

Para revisar y entregarse el martes 3 de noviembre, 2009.