ÁLGEBRAS DE BANACH: Tarea 10

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Prueba que $H(\Omega)$ es un álgebra.
2. Sea A un álgebra con identidad y $x, y \in G(A)$. Si x y y conmutan entre sí, prueba que x^{-1} y y^{-1} también lo hacen.

Definición Sea A un álgebra con identidad. Dos elementos $x, y \in A$ son *similares*, si existe $w \in G(A)$ tal que $y = wxw^{-1}$. En este caso escribiremos $x \sim y$.

3. Prueba que la relación de similitud en un álgebra A con identidad, es una relación de equivalencia.
4. Sea A un álgebra de Banach compleja. Si existe un número $M > 0$ tal que $\|xy\| \leq M\|yx\|$, $\forall x, y \in A$, prueba que A es conmutativa.

Sea A un álgebra de Banach.

5. Si $\|x^2\| = \|x\|^2$, $\forall x \in A$, prueba que $\|x\| = r_\sigma(x)$, $\forall x \in A$.
6. Sea $x \in \text{Fr}(G_\ell(A))$ y tomemos $\{x_n\} \subset G_\ell(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n^ℓ es tal que $x_n^\ell x_n = e$, prueba que $\|x_n^\ell\| \rightarrow \infty$.
7. Si $K \subset A$ es compacto, prueba que $\cup_{x \in K} \sigma(x) \subset \mathbb{C}$ es compacto.
8. Sea $X \equiv \ell^2$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ su base canónica y $B \equiv \{0\} \cup \{\frac{e_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Prueba que B es compacto y $\text{co}(B)$ no lo es.
9. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, A un álgebra de Banach, $f : \Omega \rightarrow X$ integrable y $x \in X$. Si x conmuta con $f(s)$, $\forall s \in \Omega$, prueba que x conmuta con su integral
10. Sea A un álgebra de Banach compleja y f una función entera. Si $x \in A$, prueba que $f(x)$ coincide con la definición en términos de su resolvente.

Para revisar y entregarse el martes 10 de noviembre, 2009.