ÁLGEBRAS DE BANACH: TAREA 11

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío, $\{g_n\}, \{f_n\} \subset H(\Omega)$ y $g, f \in H(\Omega)$. Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en $H(\Omega)$, prueba que $f_n g_n \rightarrow fg$ en $H(\Omega)$.
2. Dada $s \equiv \{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, definamos $f_s(z) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ y tomemos $A \equiv \{f_s : s \in \ell^1(\mathbb{Z})\}$. Prueba que f_s está bien definida y que, bajo las operaciones usuales con funciones, A es un álgebra.
3. Sea A un álgebra de Banach compleja. Si $\|x^2\| = \|x\|^2$, $\forall x \in A$, prueba que A es conmutativa. (Sug.: Ten presente que $r_\sigma(xy) = r_\sigma(yx)$.)
4. Sea A un álgebra con identidad y $x, y \in A$. Si $x \sim y$, prueba que $\sigma(x) = \sigma(y)$.
5. Sea K un conjunto compacto, μ una medida finita de Borel en K , X un espacio de Banach y $f : K \rightarrow \mathcal{L}(X)$ una función continua. Prueba que $(\int_K f(s) d\mu) x = \int_K f(s) x d\mu$, $\forall x \in X$.
6. Sea A un álgebra de Banach, $x, y \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $\sigma(x) \subset \Omega$ y $f \in H(\Omega)$. Si $x \sim y$, prueba que $\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$.
7. Si $K \subset V \subset \mathbb{C}$, donde K es compacto y V es abierto, prueba que existe un abierto W tal que $\bar{W}$ es compacto y $K \subset W \subset \bar{W} \subset \Omega$.
8. Sea A un álgebra de Banach compleja y $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Supongamos que $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ y $f \in H(\Omega)$. Si $f_n \rightarrow f$ en $H(\Omega)$, prueba que $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset A_\Omega$.
9. Encuentra un operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyos únicos subespacios invariantes sean $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$.
10. Sea K un conjunto compacto, E un espacio topológico y X un espacio normado. Si $f : K \times E \rightarrow X$ es continua, prueba que dado $t_0 \in E$ y $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \subset E$ tal que
$$t_0 \in V, \|f(t, s) - f(t_0, s)\| \leq \epsilon, \forall t \in V, \forall s \in K.$$
11. i) Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, prueba que K^c tiene una sola componente no acotada. ii) Señala un conjunto $B \subset \mathbb{C}$ que tenga varias componentes no-acotadas.

Para revisar y entregarse el jueves 19 de noviembre, 2009.