ÁLGEBRAS DE BANACH: Tarea 12

1. (Continuación del ejercicio 11.2.) Definamos $\|f_s\|_A \equiv \|s\|_{\ell^1}$. Verifica que $\|\cdot\|_A$ es una norma en A y que, con esta norma, A es un álgebra de Banach. (Sug.: considera el ejercicio 2.1.)

2. Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Si $\sigma(T) = \sigma(S) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, donde $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \neq k$, prueba que $T \sim S$.

3. Sea E un espacio topológico, $f : E \to \mathbb{R}$ y $A \subset E$. Si f es continua y $f > 0$ en A, prueba que existe un abierto $W \subset E$ tal que $A \subset W$ y $f > 0$ en W.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\lambda \in \Omega$. Si $f \in H(\Omega)$ y $f(\lambda) = 0$, prueba que existe $h \in H(\Omega)$ tal que $f(z) = (z - \lambda)h(z)$, $\forall\, z \in \Omega$.

5. Señala un ejemplo de un operador lineal acotado cuyo espectro sea conexo y que tenga algún subespacio invariante no trivial.

6. Sea μ_j una medida de Borel definida en un conjunto compacto K_j, $j = 1, 2$. Si $f : K_1 \times K_2 \to X$ es continua, prueba que la función $g : K_1 \to X$ definida por $g(s) \equiv \int_{K_2} f(s,t)d\mu_2$ es continua.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y A un álgebra de Banach compleja. Si $f \in H(\Omega)$, prueba que $\tilde{f} : A_\Omega \to A$ es continua.

8. Si $n \geq 2$, prueba que $\mathbb{C}^n$ tiene la propiedad del subespacio invariante.

9. Sea A un álgebra de Banach conmutativa compleja y $M \subset A$ un ideal. Prueba que M es maximal si, y sólo si, su codimensión es 1 ($\dim A/M = 1$).

10. Sea A un álgebra de Banach conmutativa y Δ su espacio de ideales maximales. Prueba: i) $\hat{A}$ siempre contiene a las constantes. ii) $\hat{A}$ separa puntos en Δ.

Para revisar y entregarse el jueves 3 de diciembre, 2009.