

Semestre Enero-Junio 2023
ANÁLISIS FUNCIONAL 1

DESCRIPCIÓN

En este curso iniciaremos el estudio de los espacios de Banach y de los operadores lineales continuos definidos entre ellos. Para ello introduciremos los espacios de Banach clásicos y estableceremos los conceptos y resultados básicos del análisis funcional.

TEMARIO

0. Introducción

0.5 Motivación: solución de ecuaciones diferenciales.

I. Espacios de Banach

2. Espacio vectorial, dimensión. Operadores lineales, núcleo y rango.

 Espacios vectoriales cociente y producto.

2.5. Norma, convergencia.

3. La norma p en \mathbb{K}^n , $1 \leq p \leq \infty$. Desigualdades de Hölder y de Minkowski.

3.5. Sucesión de Cauchy, completez.

4. Espacios de funciones acotadas y de funciones continuas en un compacto.

5. Espacios de sucesiones ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$, c y c_0 .

6. Series. Convergencia absoluta.

II. Topología en espacios métricos y normados

7. Espacio topológico. Interior y cerradura. Continuidad.

8. Espacio métrico. Topología inducida. Cerradura y continuidad mediante sucesiones.

8.5. Continuidad uniforme. Función de Lipschitz.

9. Completez.

9.5. Teorema de extensión continua.

10. Teorema de categoría de Baire.

10.5 Teorema de contracción.

11. Métrica inducida por una norma. Densidad y separabilidad.

12. Unicidad y existencia de soluciones en ecuaciones diferenciales.

III. Operadores lineales continuos

- 13. Operador lineal acotado. Estructura de espacio normado. Composición.
- 13.5. Ejemplos. Espacio dual.
- 14. Extensión lineal y continua.
- 15. Espacio normado cociente.
- 16. Equivalencia de normas en \mathbb{K}^n . Espacio producto.
- 17. Teoremas del mapeo abierto y de la gráfica cerrada.
- 18. Teorema de acotamiento uniforme.

IV. Espacios de Hilbert

- 19. Producto escalar, desigualdad de Schwarz, espacio de Hilbert, ley del paralelogramo.
- 20. Ejemplos ℓ^2 y $C([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_2$.
- 21. Proyección ortogonal, complemento ortogonal, descomposición ortogonal.
- 22. Series de Fourier. Base ortonormal. Sistema trigonométrico.
- 23. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Tma. de Riesz-Fischer.
- 23.5. Teorema de representación de Riesz en un espacio de Hilbert.
- 25. Operador adjunto. Teorema del rango cerrado

V. Dualidad

- 26. Espacio dual. Lema de Zorn.
- 27. Teorema de Hahn-Banach y consecuencias.
- 28. Espacio dual de ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, y de c_0 .
- 29. Espacio bidual. Identificación canónica. Completación de un espacio normado.
- 30. Convergencia débil.

VI. Espacios $L^p(\Omega)$

- 31. Espacios $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Completez. Relación de la convergencia en L^p con la convergencia puntual. Espacio $L^2(\Omega)$.
- 32. Espacio $L^\infty(\mu)$. Completez. Relación de la convergencia en L^∞ con la convergencia puntual.
- 33. Algunos operadores integrales

BIBLIOGRAFÍA

1. F. Galaz Fontes, *Elementos de análisis funcional*. CIMAT, México, 2006.
2. H. Fetter y B. Gamboa, *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo Ed. Iberoamérica, 1997.
3. A. Kolmogorov and S. Fomín, *Introductory Real Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1970.
4. J. A. Canavati, *Introducción al análisis funcional*. Fondo de Cultura Económica, 1998.
5. S. Lang, *Real Analysis*. Addison-Wesley, Reading Mass., 1983.
6. W. Rudin, *Functional Analysis*. Mc-Graw-Hill, New York, 1973.
7. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^N* . Oxford University Press-México, 2002.
8. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New Delhi, 1978.

Fernando Galaz Fontes
Enero 23, 2023