Introducción

Tomemos una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, números $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, y consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

con condición inicial

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$, y supongamos que $x : I \to \mathbb{R}$ es una solución de (1). Recordemos que esto significa que

$$x'(s) = f(s, x(s)), \ \forall\, s \in I. \tag{3}$$

Al ser derivable, la solución x es continua. Siendo f continua, el miembro derecho de (3) es entonces una función continua y por lo tanto la derivada x' es continua. Esto permite usar el teorema fundamental del cálculo al integrar de t_0 a $t \in I$ en el miembro izquierdo de (3). Tomando después en cuenta la condición inicial (2) llegamos a que la solución x satisface la ecuación

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall\, t \in I. \tag{4}$$

Recíprocamente, si $x : I \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la ecuación anterior, al derivar y usar el teorema fundamental del cálculo, se sigue que x es solución de la ecuación diferencial (1) con condición inicial (2). Esto prueba que el problema (1)-(2) equivale al problema (4), esto es, ambos tienen las mismas soluciones. Por lo tanto, en lugar de la ecuación diferencial con condición inicial (1)-(2), podemos considerar la *ecuación integral* (4), la cual generalmente resulta ser más sencilla de manejar.

Antes de continuar, introduzcamos la notación

$$C(I) = \{x : I \to \mathbb{R} \text{ y } x \text{ es continua}\}.$$

Teniendo presente el miembro derecho de (4), a cada función $x \in C(I)$ asociémosle la función $Fx : I \to \mathbb{R}$ cuyo valor en $t \in I$ está dado por

$$Fx(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{5}$$

Ya que el integrando en la expresión anterior es un función continua, por el teorema fundamental del cálculo, se sigue que Fx es derivable. En particular, Fx es continua. Esto permite considerar a F como una función que a cada $x \in C(I)$ le asocia $Fx \in C(I)$. Para prevenir confusiones, a funciones como F (que se evalúa en funciones) se les acostumbra llamar *operadores*, y así lo haremos en adelante.

En términos del operador F, el problema (4) se puede ahora interpretar simplemente como resolver la ecuación

$$Fx = x, \tag{6}$$

donde la incógnita x es una función que pertenece al conjunto $C(I)$.

Observación 1. Imaginemos el efecto del operador F como el de "mover" una función $x \in C(I)$ a la función $Fx \in C(I)$. Entonces, la condición $Fx = x$ equivale a que la función x es dejada fija por F. Así, con esta terminología,

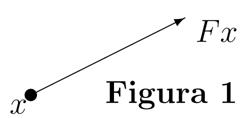

Figura 1

resolver (6) equivale a encontrar un *punto fijo* de F.

Esta breve discusión señala la necesidad de contar con métodos para resolver ecuaciones en conjuntos que no son nuestros conocidos espacios $\mathbb{R}^n$ sino espacios de funciones, como por ejemplo $C(I)$. Por esta razón, el darse cuenta que los elementos de ciertos espacios pueden manejarse como objetos matemáticos análogos a los números o vectores constituyó, a fines del siglo XIX y principios del XX, un hecho fundamental para el desarrollo de las Matemáticas y este hecho dio origen al análisis funcional.

Las características de $\mathbb{R}^n$ que resultan ser fundamentales para cubrir dicha necesidad son tres:

1. Su estructura algebraica.

2. Su norma (euclidiana), sobre la cual descansa el concepto de convergencia.

3. Su completez, esto es, la validez del criterio de Cauchy para la convergencia de una sucesión.

Las tres propiedades anteriores, consideradas de manera abstracta, son las que definen a los espacios de Banach, cuyo estudio y el de los operadores lineales continuos entre ellos es el propósito de este curso.

Capítulo 1

Espacios de Banach

1.1. Estructura Algebraica

La estructura algebraica con la que trabajaremos será la de *espacio vectorial*. Recordemos que un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$, cuyos elementos son llamados *escalares*, cuenta con dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por escalares*. En este trabajo sólo consideraremos los casos en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; en el primero diremos que el espacio vectorial es *real* y en el segundo diremos que es *complejo*. Sean $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces $x + y$ denota la suma de x con y, y $\alpha(x)$ o αx la multiplicación de α por x. Las propiedades que definen a V como espacio vectorial son:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \ x + y = y + x.$$

Existe $0 \in V$, llamado *elemento cero*, tal que $x + 0 = 0 + x$, $\quad x + (-x) = 0$.

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \qquad\qquad 1(x) = x.$$

A continuación recordaremos algunos conceptos y resultados básicos correspondientes a los espacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial. Diremos que $W \subseteq V$ es un *subespacio vectorial* de V, si $0 \in W$ y W es *cerrado* bajo la suma y la multiplicación por escalares. Es decir, $x + y \in W$ cuando $x, y \in W$ y $\lambda x \in W$ cuando $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in W$.

Es claro entonces que, con las operaciones vectoriales heredadas de V, cualquier subespacio $W \subseteq V$ en un espacio vectorial por sí mismo.

Un vector $v \in V$ es *combinación lineal* de los vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$, si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

El *subespacio vectorial generado* por $A \subseteq V$ se define como

$$\langle A \rangle := \bigcap_{W \in \mathcal{C}} W,$$

donde $\mathcal{C}$ consta de todos los subespacios vectoriales $W \subseteq V$ tales que $A \subseteq W$.

Lema 1. *Sean V un espacio vectorial y $A \subseteq V$. Entonces:*
i) $\langle A \rangle$ es un subespacio vectorial de V y $A \subseteq \langle A \rangle$.
ii) Si $A \subseteq W$ y $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial, entonces $\langle A \rangle \subseteq W$.
iii) $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.
iv) Si $A \neq \emptyset$, entonces

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, \ldots, x_n \in A\}.$$

Es decir, en este caso el espacio generado $\langle A \rangle$ es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de elementos en A.

Demostración Dejaremos como ejercicio probar que $\langle A \rangle$ es subespacio vectorial de V. De la definición se sigue directamente que $A \subseteq \langle A \rangle$ y que se cumple ii. Es claro además que iii se satisface. Probaremos ahora iv.

Sea $W = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, \ldots, x_n \in A\}$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Puesto que $A \subseteq \langle A \rangle$ y $\langle A \rangle$ es un subespacio vectorial, resulta que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \langle A \rangle$. Esto indica que $W \subseteq \langle A \rangle$.

Para estableceremos la otra contención observemos primero que $A \subseteq W$. Basta ahora verificar que W es subespacio vectorial de V. Tomemos $a \in A$. Entonces $0 = 0a$, por lo que $0 \in W$. Finalmente, sean $x, y \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m \in V$ de manera que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j,\ y = \sum_{k=1}^{m} y_k$. Por lo tanto $x + y = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{k=1}^{m} y_k \in W$ y $\lambda x = \sum_{j=1}^{n} x_j \in W$. $\square$

Notas
Clase 1, enero 30, 2023
Fernando Galaz Fontes