Definición 4. Sean E y C espacios topológicos y $f : E \to C$.
a) La función f es *continua en* $p \in E$ si, para cada vecindad $W \subseteq C$ de $f(p)$, la imagen inversa $f^{-1}(W) := \{x \in E : f(x) \in W\} \subseteq E$ es vecindad de p. Es decir, si, para cada vecindad $W \subseteq C$ de $f(p)$, existe un conjunto abierto $V \subseteq E$ tal que $p \in V$ y $f(x) \in W,\ \forall\, x \in V$.
b) La función f es *continua*, si lo es en cada punto $p \in E$.

Lema 2. *Sean E y C espacios topológicos y $f : E \to C$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*
i) f es continua.
ii) Para cada abierto $W \subseteq C$, se cumple que $f^{-1}(W) \subseteq E$ es abierto.
iii) Para cada cerrado $K \subseteq C$, se cumple que $f^{-1}(K) \subseteq E$ es cerrado.

Demostración Probaremos que i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ i).

i) $\Longrightarrow$ ii). Sea W un abierto en C. Para establecer que $f^{-1}(W)$ es abierto, probaremos que cada uno de sus puntos es punto interior. Consideremos pues $p \in f^{-1}(W)$. Luego W es vecindad de $f(p)$. Siendo f continua en p, esto implica que p es punto interior de $f^{-1}(W)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sea K un cerrado en C. Queremos establecer que $f^{-1}(K)$ es cerrado, es decir que $f^{-1}(K)^c$ es abierto. Esto se sigue de observar que $f^{-1}(K)^c = f^{-1}(K^c)$, K^c es abierto y emplear la hipótesis.

iii) $\Longrightarrow$ i) Sea $p \in E$. Para probar que f es continua en p, consideremos una vecindad $W \subseteq C$ de $f(p)$. Así, $f(p) \in W^0$. Tomemos enseguida $K = W^{0\,c}$ y notemos que K es cerrado. De acuerdo a la hipótesis, esto implica que $(f^{-1}(W^0))^c = f^{-1}(K)$ es cerrado. Luego $f^{-1}(W^0)$ es abierto y $p \in f^{-1}(W^0) \subseteq f^{-1}(W)$. Esto prueba que $f^{-1}(W)$ es vecindad de p. $\square$

Ejemplo 1. Sean E y C espacios topológicos no-vacíos. Fijemos $c \in C$ y sea $f : E \to C$ la función que toma el valor constante c, esto es $f(x) = c$, $\forall\, x \in E$. Tomemos un conjunto abierto $W \subseteq C$. Entonces, $f^{-1}(W) = E$ si $c \in W$ y $f^{-1}(W) = \emptyset$ si $c \notin W$. Así, en cualquier caso, $f^{-1}(W)$ es abierto. Aplicando ahora ii) del lema anterior resulta que f es continua.

Así, hemos probado que cualquier función constante $f : E \to C$ es continua.

Definición 5. Sean E y C espacios topológicos. Una función $h : E \to C$ es un *homeomorfismo*, si es una biyección y tanto h como h^{-1} son continuas.

Observación 1. Sean E y C espacios topológicos y supongamos que $h : E \to C$ es un homeomorfismo. Sea V un abierto en E. Siendo h una biyección, se cumple que $h(V) = (h^{-1})^{-1}(V)$. Por otra parte, puesto que h^{-1} es continua, resulta que $(h^{-1})^{-1}(V)$ es abierto. Se sigue que $h(V)$ es abierto en E. Concluimos entonces que un homeomorfismo preserva conjuntos abiertos.

Argumentando de manera similar, se obtiene que un homeomorfismo también preserva conjuntos cerrados.

Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. A partir de τ resulta natural tratar de obtener una topología τ_A para A. Ya que los elementos de τ_A deben ser subconjuntos de A, esto lleva a proponer

$$\tau_A := \{V \cap A : V \in \tau\}.$$

La siguiente proposición se establece sin dificultad.

Proposición 4. *Sean E un espacio topológico y $A \subseteq E$. Entonces τ_A es una topología en A, a la cual llamaremos* topología inducida *por τ en A.*

Definición 6. Sean E y C conjuntos, $f : E \to C$ y $A \subseteq E$. A la función $f\,|_A : A \to C$ definida por

$$f\,|_A\,(x) := f(x), \; \forall\, x \in A,$$

la llamaremos *restricción* de f al conjunto A.

Proposición 5. *Sean E y C espacios topológicos, $f : E \to C$ y $p \in A \subseteq E$. Consideremos en A la topología inducida por E.*

i) Si f es continua en p, entonces $f\,|_A : A \to E$ es continua en p.

ii) Si f es continua, entonces $f\,|_A$ es continua.

Demostración i) Sea $W \subseteq C$ una vecindad de $f(p)$. Por la hipótesis, $f^{-1}(W) \subseteq E$ es τ-vecindad de p. Luego, $f^{-1}(W) \cap A$ es τ_A-vecindad de p. Ya que $(f\,|_A)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap A$, esto prueba lo deseado.

ii) La conclusión es consecuencia directa de i). □

Teorema 1. *Sean E, C y D espacios topológicos y $f : E \to C, g : C \to D$.*

i) Si f es continua en $p \in E$ y g es continua en $f(p)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en p.

ii) Si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Demostración i) Sea $W \subseteq D$ una vecindad de $g(f(p))$. En virtud de la continuidad de g en $f(p)$, se sigue que $g^{-1}(W) \subseteq E$ es una vecindad de $f(p)$. Por la continuidad de f en p, esto a su vez implica que $f^{-1}(g^{-1}(W)) \subseteq E$ es vecindad de p. Notando que $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (f \circ g)^{-1}(W)$, se obtiene lo afirmado.

ii) La conclusión se sigue inmediatamente de i). $\square$

Observación 2. Sean A y B conjuntos. Recordemos que, formalmente, una función $f : A \to B$ es un subconjunto $G \subseteq A \times B$ tal que:

i) Para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$.

ii) Si $x \in A$, $y, v \in B$ y $(x, y), (x, v) \in G$, entonces $y = v$.

Cuando $A = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$ y $G = \emptyset$ satisface las propiedades i) y ii). Luego, $\emptyset$ es una función de $\emptyset$ en B. De hecho, es la única.

Comentamos lo anterior ya que frecuentemente aparece la posibilidad de que un espacio topológico sea vacío. Al respecto cabe notar que $\{\emptyset\}$ es la única topología en $\emptyset$.

2.2. Espacios Métricos

Una *métrica* en un conjunto M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

a) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

b) (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$.

c) (Desigualdad del triángulo) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En este caso al número $d(x, y)$ lo llamaremos *distancia de x a y*. Asímismo, diremos que (M, d) es un espacio métrico. Consideraremos al conjunto vacío como espacio métrico.

Topología Inducida por una Métrica

Como veremos a continuación, a partir de una métrica se puede construir de manera natural una topología.

Definición 7. Sean (M, d) un espacio métrico, $x \in M$ y $r > 0$.

a) La *bola abierta con centro en p y radio r* es

$$V_r(x) := \{y \in M : d(y, x) < r\}.$$

b) La *bola cerrada con centro en p y radio r* es

$$B_r(x) := \{y \in M : d(y, x) \leq r\}.$$

c) Un conjunto $W \subseteq M$ es *abierto*, si

$$\text{para cada } x \in W \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } V_r(x) \subseteq W. \tag{2.1}$$

Enseguida estableceremos que los conjuntos abiertos en el espacio métrico efectivamente constituyen una topología.

Proposición 6. *La colección de abiertos en un espacio métrico M, definidos en (2.1), es una topología en M.*

Demostración Claramente, $\emptyset$ y M son conjuntos abiertos.

Supongamos que W_α es abierto, $\forall\, \alpha \in I$. Sea $x \in \cup_{\alpha\in I} W_\alpha$. Entonces $x \in W_\beta$, para algún $\beta \in I$. Luego, existe $r > 0$ tal que $V_r(p) \subseteq W_\beta \subseteq \cup_{\alpha\in I} W_\alpha$. Esto demuestra que $\cup_{\alpha\in I} W_\alpha$ es abierto.

Supongamos ahora que $W_1, \cdots, W_N$ son abiertos. Sea $x \in W_1 \cap \cdots \cap W_N$. Luego, para cada $n = 1, \ldots, N$, existe $r(n) > 0$ tal que $V_{r(n)}(x) \subseteq W_n$. Elijamos $r = \text{mín}\{r(1), \ldots, r(N)\} > 0$ y notemos que $V_r(x) \subseteq W_1 \cap \cdots \cap W_n$. Esto prueba que $\cap_{n=1}^N W_n$ es abierto. $\square$

En adelante, a la topología considerada en el resultado anterior la llamaremos topología *inducida por la métrica d*.

Notas
Clase 10, marzo 1, 2023
Fernando Galaz Fontes