**Lema 3.** *Para cada $x \in M$ y $r > 0$, la bola $V_r(x)$ es un conjunto abierto.*

**Demostración** Veamos que todos los puntos en $V_r(x)$ son puntos interiores. Sea $y \in V_r(x)$ y tomemos $s = r - d(y, x) > 0$. Consideremos $w \in M$ tal que $d(w, y) < s$. Luego

$$d(w, x) \leq d(w, y) + d(y, x) < r.$$

Esto indica que $V_s(y) \subseteq V_r(x)$. $\square$

**Observación 3.** Sean $M$ un espacio métrico y $V \subseteq M$ un conjunto abierto. A partir de la definición de abierto, notemos que $V$ se puede expresar como unión de una colección de bolas abiertas. Esto permite interpretar a las bolas abiertas como conjuntos abiertos "elementales", mediante los cuales se puede construir cualquier otro conjunto abierto.

Sean $(M, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq M$. Notemos que la restricción de $d$ a $A \times A$ sigue siendo una métrica en $A$. A esta métrica la llamaremos *métrica inducida en* $A$ por $M$.

Al considerar un conjunto $A \subseteq M$ como espacio métrico, siempre supondremos que la métrica en $A$ es la inducida por $M$. Es sencillo comprobar que la topología determinada por la métrica inducida es precisamente la topología relativa en $A$.

Cuando el contradominio o el dominio de una función es un espacio métrico, en lugar de usar abiertos se pueden utilizar términos más familiares para expresar la continuidad. Los siguientes resultados ilustran esta situación.

**Lema 4.** *Sean $E$ un espacio topológico, $N$ un espacio métrico y $f : E \to N$. Entonces $f$ es continua en $p \in E$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V \subseteq E$ de $p$, tal que $d(f(x), f(p)) \leq \epsilon$, $\forall\, x \in V$.*

**Demostración** $\Longrightarrow$) Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $W = B_\epsilon(f(p))$. Ya que $W$ es una vecindad de $f(p)$, por la continuidad de $f$ en $p$, $f^{-1}(W)$ es vecindad de $p$. Luego, tomando $V = f^{-1}(W)$ se cumple lo afirmado.

$\Longleftarrow$) Sea $W$ una vecindad de $f(p)$ y elijamos $r > 0$ tal que $V_r(f(p)) \subseteq W$. Tomando $\epsilon = \frac{r}{2}$, resulta entonces que $B_\epsilon(f(p)) \subseteq W$. La hipótesis indica ahora que existe una vecindad $V$ de $p$ tal que $V \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(p)) \subseteq f^{-1}(W)$. $\square$

Si en el resultado anterior, el dominio $E = M$ es un espacio métrico, llegamos a la siguiente caracterización de la continuidad de $f$, que corresponde a su definición familiar $\epsilon - \delta$. Dejaremos su prueba como ejercicio.

**Lema 5.** *Sean $M$ y $N$ espacios métricos y $f : M \to N$. Entonces $f$ es continua en $p \in M$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(p)) \leq \epsilon, \text{ si } x \in M \text{ y } d(x, p) \leq \delta.$$

## Sucesiones

Como podremos ir apreciando, una de las características favorables de un espacio métrico es que sus propiedades topológicas pueden expresarse mediante sucesiones, principalmente sucesiones convergentes.

**Definición 8.** Sea $E$ un espacio topológico. Una sucesión $\{x_n\} \subseteq E$ *converge a* $x \in E$ si, para cada vecindad $V$ de $x$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n \in V$, $\forall\, n \geq N$.

En este caso también diremos que la sucesión $\{x_n\}$ *converge* y a $x$ lo llamaremos *límite* de la sucesión. Para indicar esto utilizaremos las notaciones

$$x_n \to x, \text{ o } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

**Ejemplo 2.** Sea $E$ un espacio topológico y consideremos en $E$ una sucesión constante $\{x_n\}$, digamos $x_n = x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. De la definición se sigue inmediatamente que $x_n \to x$.

**Lema 6.** *Sean $E$ un espacio topológico y $\{x_n\} \subseteq E$ . Si $\{x_n\}$ converge a $x \in E$, entonces cada una de sus subsucesiones también converge a $x$.*

**Demostración** Sea $\{x_{n(k)}\}$ una subsucesión de $x$ y consideremos una vecindad $V$ de $x$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$, $\forall\, n \geq N$. Ya que $\{x_{n(k)}\}$ es subsucesión de $\{x_n\}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n(k) \geq N$, $\forall\, k \geq K$. Luego $x_{n(k)} \in V$, $\forall\, k \geq K$. Esto prueba que $x_{n(k)} \to x$. □

La próxima propiedad, cuya prueba es directa y dejamos al lector, indica que la convergencia de una sucesión en un espacio métrico equivale a la convergencia de una sucesión real no-negativa.

**Lema 7.** *Sean $(M, d)$ un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en $M$ y $x \in M$. Entonces, $x_n \to x$ si, y sólo si, $d(x, x_n) \to 0$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $d(x, x_n) \leq \epsilon$, $\forall\, n \geq N$.*

En la sección 1.2, en el marco de espacios normados introdujimos la definición de sucesión convergente. Dentro de poco estableceremos su correspondencia con la definición anterior.

El siguiente resultado indica que en un espacio métrico, una sucesión a lo más tiene un límite. Su prueba es similar a la del caso normado.

**Lema 8.** *Sean $M$ un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en $M$. Si $\{x_n\}$ converge, entonces su límite es único.*

Sea $A \subseteq M$. Si $x \in \overline{A}$, demostraremos enseguida que $x$ siempre se puede "aproximar" mediante puntos en $A$.

**Lema 9.** *Sean $M$ un espacio métrico, $A \subseteq M$ y $x \in M$. Entonces, $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.*

**Demostración** $\Longleftarrow$) Supongamos que $\{x_n\} \subseteq A$ es una sucesión que converge a $x$. Sea $V$ una vecindad de $x$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V, \forall\, n \geq N$. Ya que $x_n \in A$, resulta $V \cap A \neq \emptyset$. (Esta implicación requirió tan sólo que $M$ fuera un espacio topológico.)

$\Longrightarrow$) Consideremos $x \in \overline{A}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in V_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Esto equivale a que $x_n \in A$ y $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Por consiguiente $x_n \to x$. $\square$

Para referirnos al próximo resultado lo llamaremos *continuidad de la función distancia.*

**Proposición 7.** *Sean $(M, d)$ un espacio métrico, $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones en $M$ y $x, y \in M$. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.*

**Demostración** Usando repetidamente la desigualdad del tríangulo, resulta

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n), \\ d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y). \end{aligned}$$

La simetría de $d$ permite concluir ahora que

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

De aquí se concluye lo afirmado. $\square$

El siguiente criterio describe la continuidad mediante sucesiones cuando el dominio de la función es un espacio métrico.

**Proposición 8** (Criterio por sucesiones)**.** *Sean $M$ un espacio métrico, $E$ un espacio topológico y $f : M \to E$. Entonces $f$ es continua en $x \in M$ si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$, se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

**Demostración** $\Longrightarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $M$ tal que $x_n \to x$. Para probar que $f(x_n) \to f(x)$, tomemos una vecindad arbitraria $W$ de $f(x)$. Luego, debido a la continuidad de $f$ en $x$, existe una vecindad $V \subseteq M$ de $x$ tal que $f(y) \in W,\ \forall\, y \in V$. Elijamos en seguida $N \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n \in V, \forall\, n \geq N$. Se cumple entonces que $f(x_n) \in W,\ \forall\, n \geq N$. Esto prueba lo deseado. (Notemos que esta implicación requirió tan sólo que $M$ fuera un espacio topológico.)

$\Longleftarrow$) Probaremos la contrapositiva de esta implicación. Sea $W$ una vecindad de $f(x)$ y supongamos que $f^{-1}(W)$ no es vecindad de $x$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola $V_{\frac{1}{n}}(x)$ no está contenida en $f^{-1}(W)$. Elijamos entonces $x_n \in M$ tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \notin W$. Obtenemos así una sucesión $\{x_n\}$ en $M$ tal que $x_n \to x$ y $f(x_n) \not\to f(x)$. Lo cual contradice la hipótesis. $\square$

Notas
Clase 11, marzo 6, 2023
Fernando Galaz Fontes