Ejemplo 3. Sea M un espacio métrico. Dados $x \in M$ y $r > 0$ veamos que la bola $B_r(x)$ es efectivamente un conjunto cerrado. La clave es notar que

$$B_r(x) = \{y \in M : d(y,x) \leq r\} = \{y \in M : d(y,x) \in [0,r]\} = f^{-1}([0,r]),$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(y) := d(y,x).$$

Siendo $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, de acuerdo al lema 2, para concluir que $B_r(x)$ es cerrado basta entonces establecer que f es continua.

Tomemos $y \in M$ y una sucesión $\{y_n\} \subseteq M$ tales que $y_n \to y$. De la proposición 7 se sigue entonces que $f(y_n) = d(y_n,x) \to d(y,x) = f(y)$. De acuerdo al criterio por sucesiones, esto indica que f es continua en x. Luego, la función f es continua.

Notemos que el argumento anterior es válido también cuando $r = 0$. En cuyo caso obtenemos que el conjunto

$$\{x\} = \{y \in M : d(y,x) = 0 = f^{-1}(0).$$

es cerrado.

2.3. Completez

De la misma forma que en el caso de un espacio normado, introducimos ahora en un espacio métrico el concepto de completez.

Definición 9. Sea M un espacio métrico.

a) Una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ es *de Cauchy*, si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$, $\forall\, n,m \geq N$.

b) M es *completo*, si toda sucesión de Cauchy en M, converge en M.

Procediendo como en el caso de espacios normados, se prueba el siguiente resultado.

Lema 10. *Sea M un espacio métrico. Si una sucesión en M es convergente, entonces es de Cauchy.*

El próximo lema relaciona las propiedades de ser cerrado y ser completo.

Lema 11. *Sean X un espacio métrico y $M \subseteq X$.*
i) Si M es completo, entonces M es cerrado.
ii) Si X es completo y M es cerrado, entonces M es completo.

Demostración i) Para probar que M es cerrado, consideremos $x \in \overline{M}$. Tomemos enseguida una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to x$. Por ser convergente, esta sucesión es de Cauchy. Ya que M es completo, existe $y \in M$ tal que $x_n \to y$. La unicidad del límite en un espacio métrico implica ahora que $x = y \in M$.

ii) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en M. Luego $\{x_n\}$ también es de Cauchy en X. Siendo X completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Ya que M es cerrado en X, se sigue que $x \in M$. Esto muestra que la sucesión $\{x_n\}$ converge en M. $\square$

El siguiente lema nos permitirá concluir que, en un espacio métrico completo, ciertas sucesiones son convergentes.

Lema 12. *Sean M un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en M. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ es convergente, entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \leq \epsilon$. Luego, para $n > m \geq N$, se cumple

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) \leq \epsilon. \quad \square$$

Continuidad Uniforme

Ejemplo 4. Sean $M = (0, 1]$ y $N = [1, \infty)$, ambos conjuntos considerados como subespacios métricos de $\mathbb{R}$. Definamos enseguida

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ \forall\, x \in (0, 1].$$

Entonces $f : M \to N$, f es continua y biyectiva. Puesto que $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, la función inversa f^{-1} también es continua. Esto muestra que los espacios métricos $(0, 1]$ y $[1, \infty)$ son homeomorfos.

Ya que es cerrado en $\mathbb{R}$, el espacio N es completo. Sin embargo, el espacio M no es completo. Por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\} \subseteq M$ es de Cauchy y no converge en M. Por otro lado, aunque $\{\frac{1}{n}\} \subseteq M$ es de Cauchy, notemos que $\{f(\frac{1}{n})\} = \{n\} \subseteq N$ no lo es.

El ejemplo anterior señala dos puntos importantes. Primero, que la completez no se conserva bajo homeomorfismos y, segundo, que una función continua puede no preservar sucesiones de Cauchy. Introduciremos a continuación una propiedad bajo la cual sí se conservan dichas características.

Definición 10. Sean M y N espacios métricos. Una función $f : M \to N$ es *uniformemente continua*, si para cada $\epsilon > 0$, es posible elegir $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } x, y \in M \text{ y } d(x, y) \leq \delta, \quad \text{entonces } \; d(f(x), f(y)) \leq \epsilon. \tag{2.2}$$

Claramente, si f es uniformemente continua, entonces f es continua.

Ejemplo 5. Sean M y N espacios métricos. Una función $f : M \to N$ es *de Lipschitz*, si existe $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \;\leq\; c\, d(x, y), \;\; \forall\, x, y \in M.$$

En este caso diremos que c es una *constante de Lipschitz* para f.

Notemos que si f es de Lipschitz, entonces f es uniformemente continua.

Lema 13. *Sean M y N espacios métricos. Si $f : M \to N$ es uniformemente continua, entonces f preserva sucesiones de Cauchy.*

Demostración Sea $\{x_n\} \subseteq M$ una sucesión de Cauchy. Para probar que $\{f(x_n)\} \subseteq N$ también es de Cauchy, consideremos $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, tomemos $\delta > 0$ de manera que se cumpla (2.2). Siendo $\{x_n\}$ de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \delta$, $\forall\, n, m \geq N$. Por (2.2), esto implica que $d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon$, $\forall\, n, m \geq N$. □

Sean M y N espacios métricos y $D \subseteq M$. Si $f : D \to N$ es continua, resulta de interés el extender f de manera continua a su cerradura $\overline{D}$. Esto es, queremos encontrar $\tilde{f} : \overline{D} \to N$ de manera que $\tilde{f}$ sea continua y $\tilde{f} = f$ en D. El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre es posible.

Ejemplo 6. Sean $M = N = \mathbb{R}$ y $D = (0, 1]$. Definamos

$$f(x) = \frac{1}{x}, \;\; \forall\, x \in (0, 1].$$

Observemos que f es continua. Por otra parte, $0 \in \overline{D}$ y no es posible definir $\tilde{f}(0)$ para que

$$\tilde{f}(0) = \lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x},$$

pues este último límite no existe.

Teorema 2. *Sean M y N espacios métricos, y $D \subseteq M$. Si $f : D \to N$ es uniformemente continua y N es completo, entonces existe una única extensión $\overline{f} : \overline{D} \to N$ que es uniformemente continua.*

Demostración Empezaremos probando la unicidad. Supongamos que $\overline{f}$ y g son extensiones continuas de f a $\overline{D}$. Dado $x \in \overline{D}$ elijamos una sucesión $\{x_n\} \subseteq D$ tal que $x_n \to x$. Luego, por la continuidad de $\overline{f}$ y de g, resulta

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(x). \tag{2.3}$$

El paso anterior sugiere cómo construir la extensión uniformemente continua $\overline{f}$ de f. A saber, dado $x \in \overline{D}$, consideremos una sucesión $\{x_n\} \subseteq D$ tal que $x_n \to x$. De acuerdo con (2.3), la definición obligada es

$$\overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n). \tag{2.4}$$

Para que (2.4) esté bien definida, debemos justificar dos puntos. Primero que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converja y, segundo, que (2.4) no dependa de la sucesión en D que converja a x.

Ya que N es completo, el primer punto se establece usando el lema 13. Consideremos ahora otra sucesión $\{y_n\} \subseteq D$ tal que $y_n \to x$. Formemos después la sucesión $\{w_n\}$, donde

$$w_{2n-1} = x_n, \;\; w_{2n} = y_n, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ya que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ convergen a b, la sucesión $\{w_n\}$ también converge a b. En particular, es de Cauchy. Entonces, utilizando nuevamente el lema 13, resulta que $\{f(z_k)\}$ es convergente, digamos a $b \in N$. Esto implica que las subsucesiones $\{f(z_{2n-1})\}$ y $\{f(z_{2n})\}$ también convergen a b. Por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Veamos ahora que $\overline{f}$ tiene las propiedades requeridas. Sea $x \in D$. Luego, tomando la sucesión constante $x_n = x$, resulta que $\overline{f}(x) = \lim f(x_n) = f(x)$. Esto muestra que $\overline{f}$ es extensión de f.

Establezcamos finalmente que $\overline{f}$ es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que f es uniformemente continua, elijamos $\delta > 0$ de manera que

$$\text{si } u, v \in D, d(u,v) \le \delta, \text{ entonces } d(f(u), f(v)) \le \epsilon. \tag{2.5}$$

Consideremos ahora $x, y \in \overline{D}$ tales que $d(x,y) \leq \frac{\delta}{2}$. Tomemos enseguida sucesiones $\{x_k\}, \{y_k\} \subseteq D$ tales que $x_k \to x$, $y_k \to y$. Ya que

$$d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x) + d(x, y) + d(y, y_k) \leq \frac{\delta}{2} + d(x_k, x) + d(y, y_k),$$

existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, y_k) \leq \delta, \ \forall\, k \geq K$. Empleando (2.5), esto implica que $d(f(x_k), f(y_k)) \leq \epsilon, \ \forall\, k \geq K$. De aquí, al hacer $k \to \infty$ y tener presente la continuidad de la función distancia, se obtiene que

$$d(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \leq \epsilon. \qquad \Box$$

Notas
Clase 12, marzo 8, 2023
Fernando Galaz Fontes