Ejemplo 7. En el ejemplo 4 establecimos que $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función continua que no se puede extender de manera continua a $[0,1] = \overline{(0,1)}$. Del teorema anterior resulta entonces que f no es uniformemente continua en $(0,1]$.

En un espacio métrico resulta de interés la siguiente familia de funciones.

Ejemplo 8. Sea M un espacio métrico. Para cada conjunto $A \subseteq M$ definamos la función $d_A : M \to [0,\infty]$ por

$$d_A(x) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}, \ \forall\, x \in M$$

Sea $x \in M$. Notemos entonces que $d(x,\emptyset) = \infty$ y $d(x,A) \leq d(x,a_0) < \infty$ si $a_0 \in A$. Cuando $A \neq \emptyset$, probaremos enseguida que $d_A : M \to [0,\infty)$ es una función de Lipschitz.

Supongamos pues que $A \neq \emptyset$ y consideremos $x, y \in M$ y $a \in A$. Entonces

$$d_A(x) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a), \forall\, y \in M.$$

Lo cual implica que $d_A(x) - d(x,y) \leq d_A(y)$, esto es, $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y)$. Intercambiando enseguida x con y concluimos que

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y), \ \forall\, x, y \in M$$

Esto prueba lo afirmado.

Si $x \in A$, notemos que $d_A(x) = 0$. Por la continuidad de d_A, esto implica que $d_A(x) = 0$ cuando $x \in \overline{A}$. Supongamos ahora que $x \in M$ y $d_A(x) = 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $a_n \in A$ tal que $d(x,a_n) \leq \frac{1}{n}$. Lo cual implica que $a_n \to x$ y por lo tanto $x \in \overline{A}$. Hemos así demostrado que

$$x \in \overline{A} \text{ si, y sólo si}, x \in M \text{ y } d_A(x) = 0.$$

2.4. Métrica Inducida por una Norma

En esta sección estableceremos que un espacio normado es un espacio métrico y analizaremos algunas situaciones que aparecen en este caso.

Definición 11. Para un espacio normado X definamos

$$d(x,y) = \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in X.$$

Es consecuencia directa de las propiedades de la norma $\|\cdot\|$ que d es una métrica en X, a la cual llamaremos *métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|$.

Sea X un espacio normado. Entonces, considerando en X la métrica inducida por la norma, quedan definidos todos los conceptos topológicos y métricos desarrollados con anterioridad. Enseguida discutiremos algunas cuestiones relativas a ellos.

La desigualdad

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \ \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in X,$$

establecida en el lema 1.2.3, indica que la norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz. En particular, es uniformemente continua.

Notemos enseguida que la convergencia de sucesiones en X corresponde precisamente a la convergencia bajo la métrica inducida por la norma. Lo mismo sucede con el concepto de sucesión de Cauchy.

Supongamos además que el espacio normado X es completo. Observemos que esto corresponde a que X, con su métrica inducida, sea un espacio métrico completo. Consideremos enseguida $M \subseteq X$, con la métrica inducida por la métrica de X. Siendo X completo, del lema 11 (p. 46) se sigue que el espacio métrico M es completo si, y sólo si, M es cerrado. La mayoría de los espacios métricos completos que encontraremos se obtendrán de esta forma.

Definición 12. Sean M y N espacios métricos. Una función $f : M \to N$ es una *isometría*, si

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \ \forall\, x, y \in M. \tag{2.2}$$

Sean M y N espacios métricos y supongamos que $f : M \to N$ es una isometría. Luego, f es $1-1$ y $f^{-1} : f(M) \to M$ también es una isometría. Por otra parte, de (2.2) resulta que f es de Lipschitz. Supongamos adicionalmente que f es suprayectiva. Notemos entonces que f es un homeomorfismo entre M y N. Además, al ser f y f^{-1} funciones uniformemente continuas, si M es completo $N = f(M)$ también lo es.

La condición 2.2 indica que una isometría preserva la distancia entre puntos. Estableceremos enseguida que en el caso de un operador lineal entre espacios normados, esto equivale a que preserve la norma de cada vector.

Lema 14. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces, T es una isometría si, y sólo si,*

$$\|Tx\| = \|x\|, \ \forall\, x \in X.$$

Demostración Sean $x, y \in X$. Supongamos primero que T es una isometría. Ya que $T0 = 0$, se obtiene entonces que

$$\|Tx\| = d(Tx, T0) = d(x, 0) = \|x\|.$$

Supongamos ahora que el operador lineal T preserva la norma. Luego,

$$d(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y). \quad \square$$

Sea X un espacio normado. Para cada $w \in X$ y $c \in \mathbb{K}$, definamos la *traslación por* w, $T_w : X \to X$, y la *multiplicación por* c, $M_c : X \to X$, como

$$T_w(x) := x + w, \quad M_c(x) := cx,$$

respectivamente. Observemos que

$$\|T_w(x) - T_w(y)\| = \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in X, \tag{2.3}$$

y

$$\|M_c(x) - M_c(y)\| = |c| \ \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in X. \tag{2.4}$$

Se sigue de (2.3) que cada traslación T_w es una isometría en X y de (2.4) resulta que cada multiplicación M_c es de Lipschitz. Notemos que T_w siempre es una biyección y M_c lo es cuando $c \neq 0$. Además

$$(T_w)^{-1} = T_{-w}, \ (M_c)^{-1} = M_{\frac{1}{c}}, \ \forall\, c \neq 0.$$

Así, T_w y $M_c, \forall\, c \neq 0$, son homeomorfismos de X en X.

Los siguientes resultados son consecuencia directa de la continuidad de las operaciones vectoriales en un espacio normado (tma 1.2 (p. 15)).

Lema 15. *Sea X un espacio normado. Si $V \subseteq X$ es un subespacio vectorial, entonces también lo es su cerradura $\overline{V}$.*

Notación Sean D un conjunto no-vacío y E un espacio topológico. Consideremos $f_n : D \to E, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $f : D \to E$. Si $f_n(x) \to f(x), \ \forall\, x \in D$, diremos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a f y lo expresaremos por $f_n \to f$.

Lema 16. *Sean V un espacio vectorial, Y un espacio normado, $T_n : V \to Y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $T : V \to Y$. Si cada operador T_n es lineal y $T_n \to T$, entonces el operadotr T es lineal.*

Notas
Clase 13, marzo 13, 2023
Fernando Galaz Fontes