Cuando las funciones toman valores en un espacio normado podemos operar vectorialmente con ellas. El siguiente resultado indica que al hacerlo se preserva la continuidad.

Proposición 7. *Sean E un espacio topológico, X un espacio normado, $f, g : E \to X$, y $c \in \mathbb{K}$.*
i) Si f y g son continuas en $x \in E$, entonces $f + g$ es continua en x.
ii) Si f es continua en $x \in E$, entonces cf es continua en x.
iii) Si f y g son continuas, entonces $f + g$ y cf también lo son.

Demostración i) Sea $\epsilon > 0$. Entonces, para $y \in E$, se cumple

$$\|f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))\| \;\le\; \|f(y) - f(x)\| + \|g(y) - g(x)\|. \qquad (2.3)$$

Usando la continuidad de f en x, se obtiene una vecindad V de x tal que $\|f(y) - f(x)\| \le \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, y \in V$. Similarmente, existe una vecindad W de x tal que $\|g(y) - g(x)\| \le \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\, y \in W$. Luego, $V \cap W$ es una vecindad de x y, por (2.3), se satisface

$$\|f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))\| \;\le\; \epsilon, \;\forall\, y \in V \cap W.$$

ii) Consideremos primero el caso en que $c = 0$. Entonces $cf = 0$ es continua. Consideremos ahora $c \neq 0$. Sea $\epsilon > 0$. Notemos que

$$\|cf(y) - cf(x)\| \;=\; |c|\; \|f(y) - f(x)\|, \;\forall\, y \in E. \qquad (2.4)$$

Usando la continuidad de f en x, se obtiene una vecindad V de x tal que $\|f(y) - f(x)\| \le \frac{\epsilon}{|c|}$, $\forall\, x \in V$. De acuerdo con (2.4), esto implica que

$$\|cf(y) - cf(x)\| \;\le\; \epsilon, \;\forall\, y \in V.$$

iii) La conclusión se obtiene aplicando ii) y iii) en cada punto $x \in E$. $\square$

Sea E un espacio topológico y consideremos funciones continuas definidas en E y con valores en $\mathbb{K}$. En este caso, además de sumarlas o multiplicarlas por escalares, podemos multiplicarlas (fg) o dividirlas entre sí $(\frac{f}{g})$. Naturalmente, la función cociente $\frac{f}{g}$ estará definida sólo en aquellos puntos $x \in E$ tales $g(x) \neq 0$. La siguiente proposición indica que estas operaciones con funciones también preservan la continuidad. Dejamos su prueba al lector.

Proposición 8. *Sean E un espacio topológico, $f, g : E \to \mathbb{K}$ y $x \in E$.*
i) Si f y g son continuas en x, entonces fg es continua en x.
ii) Si f y g son continuas en x y $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x.
iii) Si f y g son continuas, entonces fg y $\frac{f}{g}$ son continuas.

2.5. Densidad y Separabilidad

A continuación analizaremos dos propiedades que se pueden presentar en un espacio topológico y, en particular, en un espacio métrico.

Definición 13. Sea E un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq E$ es *denso* (en E) si $\overline{A} = E$.

Sean E un espacio topológico y $A \subseteq E$. Para que $\overline{A} = E$, notemos que basta que se cumpla $E \subseteq \overline{A}$. Luego, A es denso si, y sólo si, para cada $x \in E$ y cada vecindad V de x, existe $y \in A \cap V$.

Observemos que la densidad de un conjunto $A \subseteq E$ se puede interpretar en el sentido de que A se "extiende" por todo E.

Cuando $E = M$ es un espacio métrico notemos que $A \subseteq M$ es un conjunto denso si, y sólo si,

$$A \cap V_\epsilon(x) \neq \emptyset, \text{ para cada } x \in M \text{ y } \epsilon > 0.$$

Además, por el lema 9 (p. 44), la densidad de $A \subseteq M$ también equivale a que para cada $x \in M$ exista una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

Definición 14. Un espacio topológico E es *separable*, si existe un conjunto $A \subseteq E$ que es denso y numerable.

Ejemplo 9. Recordemos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{C}$. Siendo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ conjuntos numerables, concluimos que $\mathbb{K}$ es un espacio normado separable.

El siguiente resultado indica que la separabilidad en un espacio métrico se hereda a cualquiera de sus subconjuntos.

Lema 17. *Sea M un espacio métrico. Si M es separable y $A \subseteq M$, entonces A es separable.*

Demostración Cuando $A = \emptyset$ la conclusión es clara. Supondremos a continuación que $A \neq \emptyset$.

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso en M. Consideremos enseguida la colección $\{V_{\frac{1}{m}}(x_n) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $V_{\frac{1}{m}}(x_n) \cap A \neq \emptyset$, elijamos $a_{n,m} \in A \cap V_{\frac{1}{m}}(x_n)$ y denotemos por C la colección de tales elementos $a_{n,m}$. Observemos que C es numerable. Tomemos $x \in A$ y $\epsilon > 0$. Escojamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$. Por la densidad de $\{x_n\}$ elijamos $N \in \mathbb{N}$ de manera que $d(x, x_N) < \frac{1}{m}$. Luego $V_{\frac{1}{m}}(x_N) \cap A \neq \emptyset$, por lo cual existe $a_{N,m}$ y

$$d(x, a_{N,m}) \leq d(x, x_N) + d(x_N, a_{N,m}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \epsilon. \quad \square$$

Definición 15. Sea X un espacio normado. Un conjunto $A \subseteq X$ es *total*, si el espacio generado por A es denso en X.

Con frecuencia la separabilidad de un espacio normado se puede establecer mediante el siguiente resultado.

Lema 18. *Sea X un espacio normado. Si existe un conjunto $A \subseteq X$ que es total y numerable, entonces X es separable.*

Demostración Si $A = \emptyset$, entonces el espacio generado por A es $\{0\}$. Luego $X = \overline{\{0\}} = \{0\}$ es separable.

Supongamos ahora que $A \neq \emptyset$. Expresemos $A = \{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$ y fijemos un conjunto $Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}$ que sea denso y numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$D_n = \{q_1 v_1 + \cdots + q_n v_n : q_j \in Q,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Notemos que cada conjunto D_n es numerable. Luego, también lo es $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$. Probaremos a continuación que D es denso en X. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Siendo $\langle A \rangle$ denso, existen $N \in \mathbb{N}$ y $s_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, N$, tales que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} s_j v_j \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomemos $a := \max\{\|v_1\|, \ldots, \|v_N\|\}$. Ahora, por la densidad de Q en $\mathbb{K}$, existen $q_1, \ldots, q_N \in Q$ tales que

$$|q_j - s_j| \leq \frac{\epsilon}{2(a+1)N}, \ \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{j=1}^{N} q_j v_j\right\| &\leq \left\|x-\sum_{j=1}^{N} s_j v_j\right\| + \sum_{j=1}^{N} \|(s_j-q_j)v_j\| \\ &\leq \left\|x-\sum_{j=1}^{N} s_j v_j\right\| + \sum_{j=1}^{N} |s_j-q_j|\, a \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Proposición 9.
i) Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces X es separable.
ii) ℓ^p es separable, $\forall\, p \in [1,\infty)$, lo mismo que c_0.
iii) ℓ^∞ no es separable.

Demostración i) Sea $n = \dim X$. Si $n = 0$, la conclusión es clara. Supongamos que $n \geq 1$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de X. Ya que $\langle B\rangle = X$, el conjunto $B \subseteq X$ es total. Usando ahora el lema anterior resulta lo afirmado.

ii) Tomemos $X = \ell^p$, donde $1 \leq p < \infty$, o $X = c_0$. Sea $B = \{e_n\}$ el sistema canónica y consideremos $x = \{a_n\} \in X$. Entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, de acuerdo a (1.29) (p. 32). Se sigue que x se puede aproximar por combinaciones lineales de los vectores $e_n \in B$. Lo cual implica que la base canónica $B \subseteq \ell^p$ es total. La conclusión se obtiene aplicando después el lema anterior.

iii) Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^\infty$ un conjunto numerable. Para cada n, expresemos $x_n = \{a_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$. Teniendo presente el método de diagonalización de Cantor, construimos $x = \{a_n\}$ como sigue. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Si $|a_{n,n}| \leq 2$, elegimos $a_n = 3$; si $|a_{n,n}| > 2$, tomamos $a_n = 1$. Luego, $x \in \ell^\infty$ y

$$\|x - x_n\|_\infty \geq \ |a_n - a_{n,n}| \ \geq \ 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

esto muestra que $\{x_n\}$ no es denso. Por lo tanto, ℓ^∞ no es separable. $\square$

Observación 3. Notemos que ii) del resultado anterior indica que $c_{0,0} = \langle B\rangle$ es denso en c_0 y en cada espacio ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.

Proposición 10. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. El espacio $C([a,b],\mathbb{K})$ es separable.*

Demostración Consideremos el subconjunto $B = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Observemos que su espacio generado es $\langle B\rangle = \{P : P \text{ es un polinomio }\}$. Ya que el teorema de Weierstrass indica precisamente que $\langle B\rangle$ es denso en $C([a,b],\mathbb{K})$ concluimos que B es un conjunto total. Aplicando ahora el lema 18 (p. 57) resulta que $C([a,b],\mathbb{K})$ es separable. $\square$

Notas
Clase 14, marzo 14, 2023
Fernando Galaz Fontes