## 2.6. Teorema de categoría de Baire

A continuación analizaremos una propiedad fundamental en un espacio métrico completo. Para ello requerimos de los siguientes conceptos.

**Definición 16.** Sean $E$ un espacio topológico y $A \subseteq E$.
a) $A$ es *denso en ninguna parte*, si $\overline{A}^{\,0} = \emptyset$.
b) $A$ es de la *primera categoría*, si $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada $A_n$ es denso en ninguna parte.
c) $A$ es de la *segunda categoría*, si no es de la primera categoría.
d) $A$ es *residual*, si su complemento $A^c$ es de la primera categoría.

En contraparte con lo que sucede un conjunto denso, resulta natural interpretar como “ralo ”a un conjunto $A \subseteq E$ que es denso en ninguna parte.

**Lema 19.** *Sean $E$ un espacio topológico y $A \subseteq E$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*
*i) $A$ es denso en ninguna parte.*
*ii) $\overline{A}$ es denso en ninguna parte.*
*iii) $\overline{A}^{\,c}$ es denso.*

**Demostración** i) $\Longrightarrow$ ii) Esta implicación resulta de que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sea $x \in E$ y tomemos cualquier vecindad $V$ de $x$. Ya que $\overline{A}^0 = \emptyset$, esta vecindad no está contenida en $\overline{A}$. Luego, $V \cap \overline{A}^{\,c} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\overline{A}^{\,c}$ es denso.

iii) $\Longrightarrow$ i) Consideremos $x \in \overline{A}$ y sea $V \subseteq E$ una vecindad de $x$. Puesto que $\overline{A}^c$ es denso,resulta que $V \cap \overline{A}^{\,c} \neq \emptyset$. Así, $V$ no está contenida en $\overline{A}$. Esto indica que $x \notin \overline{A}^{\,0}$ y se sigue entonces $\overline{A}^{\,0} = \emptyset$. $\square$

**Ejemplo 11.** Un conjunto de la primera categoría
1) Consideremos $E = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{Q}$. Expresemos $\mathbb{Q} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$. Ya que $\overline{\{q_n\}}^{\,0} = \{q_n\}^0 = \emptyset$, concluimos que $\mathbb{Q}$ es de la primera categorıa. Por consiguiente, el conjunto de números irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{Q}^c$ es residual.

Resulta de interés notar también que, aún siendo de la primera categoría, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

**Teorema 3** (de categoría de Baire)**.** *Sean $M$ un espacio métrico y $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de abiertos que son densos en $M$. Si $M$ es completo, entonces $\cap_{n=1}^{\infty} W_n$ es denso.*

**Demostración** Sean $x \in M$ y $r > 0$. Basta probar que existe $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} W_n$ tal que $d(x, x_0) < r$.

Por la densidad de $W_1$ elijamos $x_1 \in W_1 \cap V_r(x)$. Ya que $W_1 \cap V_r(x)$ es abierto, tomemos después $r_1 > 0$ tal que $r_1 \leq \frac{r}{2}$ y

$$B_{r_1}(x_1) \subseteq W_1 \cap V_r(x).$$

Repitamos ahora el procedimiento anterior con $W_2$ en lugar de $W_1$ y con $V_{r_1}(x_1)$ en lugar de $V_r(x)$. Se obtiene así $x_2 \in M$ y $r_2 > 0$ tales que $r_2 \leq \frac{r_1}{2}$ y

$$B_{r_2}(x_2) \subseteq W_2 \cap V_{r_1}(x_1).$$

Continuando con este procedimiento, obtenemos sucesiones $\{x_n\} \subseteq M$ y $\{r_n\} \subseteq (0, \infty)$ tales que $r_n \to 0$ y

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq W_{n+1} \cap V_{r_n}(x_n) \subseteq B_{r_n}(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Veamos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Sea $N \in \mathbb{N}$. Por la contención anterior se cumple

$$x_n, x_m \in B_{r_N}(x_N), \ \forall n, m \geq N. \tag{2.12}$$

En consecuencia, $d(x_n, x_m) \leq 2r_N, \ \forall n, m \geq N$. Ya que $r_N \to 0$ cuando $N \to \infty$, se sigue que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Sea $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$. Puesto que $B_{r_N}(x_N)$ es un conjunto cerrado, de (2.12) resulta que $x_0 \in B_{r_N}(x_N), \ \forall N \in \mathbb{N}$. De acuerdo con (2.11), esto implica que $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} W_n$. Además $x_0 \in B_{r_1}(x_1) \subseteq V_r(x)$. $\square$

**Corolario 2.** *Sea $M$ un espacio métrico completo.*

*i) Si $A \subseteq M$ es residual, entonces $A$ es denso.*

*ii) Si $M$ es no-vacío, entonces $M$ es de la segunda categoría.*

**Demostración** i) Expresemos $A^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada conjunto $A_n \subseteq M$ es denso en ninguna parte. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto abierto $\overline{A_n}^{\,c}$ es denso. Por el teorema anterior, esto implica que $(\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n})^{\,c} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}^{\,c}$ es denso en $M$. Notando ahora que $(\cup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n})^{\,c} \subseteq (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = A$ concluimos que $A$ es denso,

ii) Probaremos la proposición contrapositiva. Supongamos pues que $M$ es de la primera categoría. Esto equivale a que $\emptyset$ sea residual. Siendo $M$ un espacio métrico completo, el teorema anterior indica entonces que $\emptyset$ es denso en $M$. Esto sólo es posible si $M = \emptyset$. $\square$

## 2.7. Teorema de contracción

Como motivación para el estudio de los espacios de Banach, en la introducción señalamos que algunos problemas importantes equivalen a encontrar el punto fijo de una función. En esta sección daremos una respuesta positiva a esta cuestión, para lo cual estableceremos que en un espacio métrico completo no vacío, la siguiente clase de funciones tienen un único punto fijo.

Sean $D$ un conjunto y $f : D \to D$. Recordemos que la $n$-ésima iteración de $f$ es la función

$$f^n = f \circ \ldots \circ f \;\; (n \text{ veces}).$$

Veamos primero que en un problema de punto fijo el iterar la función involucrada puede ser la clave.

Sean pues $M$ un espacio métrico y $f : M \to M$ una función continua. Tomemos $x_0 \in M$ y consideremos la sucesión de iterados $\{f^n(x_0)\} \subseteq M$. Supongamos que esta sucesión es convergente, digamos

$$f^n(x_0) \to y \in M.$$

Aplicando ahora $f$ y usando su continuidad resulta que $f^{n+1}(x) \to f(y)$. Ya que $\{f^{n+1}(x)\}$ es subsucesión de $\{f_n(x)\}$, se sigue de lo anterior que $f(y) = y$, esto es, $y$ es un punto fijo de $f$.

Como podremos apreciar, el teorema de contracción establece que cuando $M$ es completo y $f$ pertenece a la clase de funciones que introducimos enseguida, el método anterior funciona, y para cualquier $x_0 \in M$.

**Definición 17.** Sea $M$ un espacio métrico. Una función $f : M \to M$ es una *contracción*, si existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \;\leq\; c\, d(x, y), \;\forall\, x, y \in M. \tag{2.13}$$

Notemos que cada contracción es una función de Lipschitz y, en consecuencia, es uniformemente continua.

**Teorema 4** (de contracción)**.** *Si $M$ es un espacio métrico completo no-vacío y $f : M \to M$ es una contracción, entonces $f$ tiene un único punto fijo.*

**Demostración** Empecemos tomando $c \in (0, 1)$ para que se cumpla (2.13). Probaremos primero la unicidad. Para ello, supongamos que $x, y \in M$ son tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$. Luego

$$d(x, y) \;=\; d(f(x), f(y)) \;\leq\; cd(x, y).$$

Ya que $c < 1$ y $d(x,y) \geq 0$, esto implica que $d(x,y) = 0$ y, por lo tanto, $x = y$.

Probaremos ahora la existencia del punto fijo siguiendo el método que describimos antes de la definición (2.13). Sea $x_0$ cualquier punto en $M$ y consideremos la sucesión de sus iterados bajo $f$, es decir

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0).$$

Como ya vimos, basta establecer que esta sucesión $\{x_n\}$ es convergente.

Puesto que $M$ es completo, esto equivale a probar que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para utilizar entonces el lema 3.12, notemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq c d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq c^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \ldots \leq c^n d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ya que $0 < c < 1$, esto implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ converge. Aplicando ahora el lema 3.12, concluimos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. $\square$

**Observación 5.**

1. Sean $M$ y $f$ como en el teorema anterior. Conviene enfatizar que el punto fijo $x$ de $f$ se obtiene a partir de cualquier punto inicial $x_0$ tomando

$$x = \lim_{n \to \infty} f^n(x_0).$$

Consideremos $n > m$. Entonces, usando la desigualdad del triángulo y (2.14), llegamos a que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} c^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} c^k d(x_0, x_1) = \frac{c^m}{1-c}\, d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Haciendo a continuación $n \to \infty$, resulta

$$d(x, x_m) \leq \frac{c^m}{1-c}\, d(x_0, x_1).$$

Observemos ahora que esta estimación permite calcular aproximaciones al punto fijo $x$ con la precisión que se requiera.

Notas
Clase 15, marzo 22, 2023
Fernando Galaz Fontes