Corolario 3. *Sean M un espacio métrico no-vacío y $f : M \to M$. Si M es completo y, para algún $k \in \mathbb{N}$, f^k es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo x. Además, para cada $x_0 \in M$, $f^n(x_0) \to x$.*

Demostración Antes de iniciar la prueba, definimos $f^0(x) = x, \forall\, x \in M$, y hacemos notar que se cumple

$$(f^k)^m = f^{km}, \;\; f^{km+j} = f^{km} f^j, \quad \forall\, m, j = 0, 1, \ldots .$$

De acuerdo al teorema de contracción, para concluir que f tiene un único punto fijo, es suficiente establecer que f y f^k tienen los mismos puntos fijos.

Supongamos primero que x es un punto fijo de f, esto es $f(x) = x$. De aquí, al aplicar f, obtenemos $f^2(x) = f(x) = x$. Repitiendo este argumento, llegamos a que $f^n(x) = x, \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. En particular, x es punto fijo de f^k. Supongamos ahora que x es un punto fijo de f^k, esto es $f^k(x) = x$. Luego, $f^k(f(x)) = f(x)$, lo cual indica que $f(x)$ es punto fijo de f^k. Siendo éste único, concluimos que $f(x) = x$. Esto prueba lo deseado.

Tomemos ahora $x_0 \in M$. Para probar que $\{f^n(x_0)\}$ converge al punto fijo x sea $\epsilon > 0$. Fijemos $j = 0, 1, \ldots, k-1$. El teorema de contracción indica entonces que al iterar f^k empezando con $f^j(x_0)$, la sucesión converge a x. Luego existe un índice N_j tal que

$$d(f^{km}(f^j(x_0)), x) \;\; \leq \epsilon, \; \forall\, m \geq N_j.$$

Sean $N = \max\{N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}\}$ y $n \geq kN$. Luego $n = km + j$, donde $j = 0, \ldots, k-1$. Se sigue que $k(m+1) > n \geq kN$. Entonces $m \geq N$ y por consiguiente

$$d(f^n(x_0), x) = d(f^{mk}(f^j(x_0)), x) \leq \epsilon, \; \forall\, n \geq kN. \;\; \square$$

2.8. Existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales

En esta sección daremos una respuesta positiva al problema de resolver una ecuación diferencial, el cual planteamos en la introducción como motivación para el estudio de los espacios de Banach. Lo haremos en un contexto más general que el descrito, pues en lugar de suponer que la función f que define la ecuación diferencial toma valores en $\mathbb{R}$, consideraremos que toma valores en $\mathbb{R}^n$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces $g = (g_1, \ldots, g_n)$, donde cada función $g_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua. Luego

$$\int_a^b g \;:=\; \left(\int_a^b g_1, \ldots, \int_a^b g_n\right).$$

A continuación trabajaremos con la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, la cual simplemente denotaremos por $\|\cdot\|$.

Lema 20. *Si una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces se cumple la* desigualdad del triángulo

$$\left\|\int_a^b g\right\| \;\leq\; \int_a^b \|g\|.$$

Demostración Expresemos $g = (g_1, \ldots, g_n)$ y sea $t \in [a, b]$. Aplicando la desigualdad de Schwarz en $\mathbb{R}^n$ (esto es, la desigualdad de Hölder con $p = 2$), resulta

$$\sum_{j=1}^n g_j(t) \int_a^b g_j \;\leq\; \left(\sum_{j=1}^n g_j(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\int_a^b g_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|g(t)\| \; \left\|\int_a^b g\right\|.$$

Integrando ahora respecto a $t \in [a, b]$ obtenemos

$$\left\|\int_a^b g\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b g_j(t)dt\right)\left(\int_a^b g_j(t)dt\right) \;\leq\; \int_a^b \|g\| \; \left\|\int_a^b g\right\|.$$

Esto implica lo deseado. □

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ un conjunto abierto y no-vacío. Dadas una función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, consideremos el *problema con valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{2.15}$$

Procediendo como en la introducción resulta que el problema anterior es equivalente al problema de punto fijo $F(x) = x$, donde el operador F está definido por

$$Fx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds, \;\; x \text{ continua}. \tag{2.16}$$

Siendo Ω abierto y $(t_0, x_0) \in \Omega$, fijemos $a > 0$ y $b > 0$ de manera que

$$R = \{(t,x) : \ |t - t_0| \ \leq a, \ \|x - x_0\| \ \leq b\} \subseteq \Omega. \tag{2.17}$$

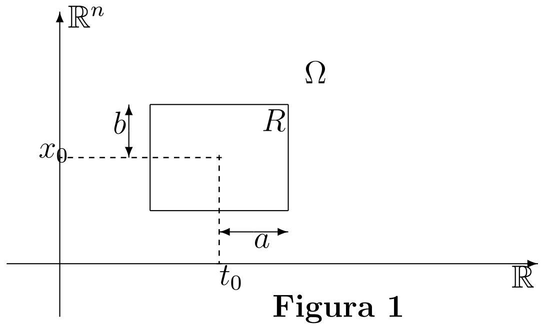

Figura 1

Teorema 5 (de existencia y unicidad)**.** *Si, además de lo anterior, la función f cumple*

$$\|f(t,x) - f(t,w)\| \ \leq \ k\|x - w\|, \ \forall\,(t,x),(t,w) \in R, \tag{2.18}$$

para algún $k > 0$, entonces existe α, $0 < \alpha \leq a$, de manera que el problema (2.16) tiene una única solución $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$.

Demostración Ya que R es compacto y f es continua, escojamos $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|f(t,x)\| \ \leq c, \ \forall\,(t,x) \in R. \tag{2.19}$$

La idea de la demostración es trabajar en un subconjunto cerrado del espacio de Banach $X = C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, donde α se elegirá de manera que $0 < \alpha \leq a$ y se pueda emplear el teorema de contracción.

Para que el operador F señalado en (2.16) esté bien definido, el primer paso consiste en restringirnos al conjunto B de todas aquellas funciones $x \in X$ cuya gráfica es subconjunto de R, esto es

$$B := \{x \in X : \|x - x_0\|_\infty \ \leq \ b\}. \tag{2.20}$$

A continuación, para $x \in B$ definimos Fx mediante (2.16). Notemos que Fx es continua, por lo que $Fx \in X$. En general, si $x \in B$, la gráfica de Fx se puede salir de R, en cuyo caso $Fx \notin B$. El siguiente paso es elegir $\alpha > 0$ para asegurar que $Fx \in B$ cuando $x \in B$. Observando que

$$\|Fx(t) - x_0\| \ = \ \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\right\| \ \leq \ c\alpha,$$

se obtiene la condición

$$\alpha \leq \frac{b}{c}. \tag{2.21}$$

Así, escogiendo B como en (2.20) y $\alpha \leq \frac{b}{c}$ como en (2.21), se cumple que $F(B) \subseteq B$.

Notas
Clase 16, marzo 27, 2023
Fernando Galaz Fontes