Ya que B es una bola cerrada en X y X es completo, B también es un espacio métrico completo. Luego, para establecer que $F : B \to B$ tiene un punto fijo sólo resta probar que $F : B \to B$ es una contracción.

Enseguida supondremos que $t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$; el caso en que $t_0-\alpha \leq t \leq t_0$ se desarrolla análogamente. Consideremos las funciones $x, y \in B$. Usando la hipótesis (2.18) se llega entonces a que

$$\begin{aligned} \|Fx(t) - Fy(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} k\|x(s) - y(s)\|ds \leq k(t-t_0)\|x-y\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por lo tanto

$$\|Fx - Fy\|_\infty \leq k\alpha\|x-y\|_\infty, \; \forall\, x, y \in B. \tag{2.23}$$

Si $k\alpha < 1$, la desigualdad anterior indica que F es una contracción y la prueba termina. De lo contrario, veamos si F^2 es una contracción. Empleando (2.22), resulta

$$\begin{aligned} \|F^2x(t) - F^2y(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,Fx(s)) - f(s,Fy(s))\,\|ds \\ &\leq k\int_{t_0}^{t} |Fx(s) - Fy(s)|\; ds \\ &\leq k^2\|x-y\|_\infty \int_{t_0}^{t} (s-t_0)\,ds \\ &= \frac{k^2(t-t_0)^2}{2}\|x-y\|_\infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|F^2x - F^2y\|_\infty \leq \frac{k^2\alpha^2}{2}\|x-y\|_\infty.$$

En general, continuando con el proceso anterior, llegamos a que

$$\|F^nx - F^ny\|_\infty \leq \frac{k^n\alpha^n}{n!}\|x-y\|_\infty, \; \forall\, x, y \in B.$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n\alpha^n}{n!} = 0$, la desigualdad anterior implica que alguno de los iterados F^n es una contracción. La conclusión se obtiene aplicando ahora el corolario 1 (p.52). $\square$

Observación 6.

1. Cabe notar que en la prueba anterior se estableció la existencia y unicidad de la solución en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, siendo

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{c}\right\} > 0,$$

donde a, b y c se escogen de acuerdo con (2.17) y (2.19). Observemos además que α no depende de la constante k que aparece en (2.18).

2. Sea B como en (2.20) y tomemos como punto inicial cualquier función $y_0 \in B$. Entonces, la sucesión de iterados bajo F toma la forma

$$\begin{aligned}
x_1(t) &:= Fy_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\, ds \\
&\vdots \\
x_{n+1}(t) &:= Fx_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds \\
&\vdots
\end{aligned}$$

C. E. Picard (1856-1941) fue el primero en demostrar directamente que esta sucesión de funciones converge a la solución. El método que resulta de este hecho es llamado método de *aproximaciones sucesivas*. Cabe observar que siempre es posible empezar con la función constante $y_0(t) = x_0$.

3. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Ya que $R \subseteq \Omega$ es un conjunto compacto, resulta que f es de Lipschitz en R y, por lo tanto, la condición (2.18) se cumple. Esto permite concluir que en este caso el anterior teorema de existencia y unicidad es válido.

4. Consideremos el problema original (2.15). Notemos que ahí no aparece explícitamente ningún espacio de funciones ni el operador integral F. Dado un problema en ecuaciones diferenciales, el llamado “método funcional” consiste precisamente en construir espacios de funciones y operadores adecuados para analizarlo.

Capítulo 3

Operadores lineales acotados

3.1. Continuidad

Recordemos que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un operador lineal, entonces T es continuo. Sin embargo, cuando en lugar de $\mathbb{R}^n$ se consideran espacios normados de dimensión infinita, el siguiente ejemplo muestra que esto puede no ser cierto.

Ejemplo 1. Un operador lineal discontinuo

Denotemos por X el espacio normado que resulta al tomar $C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_1$, dada por $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ la evaluación en 1, definida por

$$\varphi(f) = f(1),$$

y notemos que φ es lineal. Consideremos enseguida la sucesión $\{f_n\} \subseteq X$, donde $f_n(t) = t^n$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por otra parte, $\varphi(f_n) = f_n(1) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Resulta así que $f_n \to 0$ y que $\{\varphi(f_n)\}$ no converge a 0. Concluimos entonces que el operador lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ no es continuo en 0.

A continuación veremos que la continuidad de un operador lineal depende de una propiedad sencilla de formular.

Definición 1. Sean X y Y espacios normados. Una función $T : X \to Y$ es un *operador lineal acotado*, si T es lineal y su restricción a la bola B_X es una función acotada.

Observación 1. Conviene notar que la definición anterior no significa que el operador lineal $T : X \to Y$ sea una función acotada.

Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Entonces existe un número real $c \geq 0$ de manera que

$$\|Tx\| \leq c, \text{ si } \|x\| \leq 1. \tag{3.1}$$

Consideremos ahora cualquier elemento $x \in X$, $x \neq 0$. Luego, por la linealidad de T, resulta $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\frac{x}{\|x\|}\| \leq c$. Por lo tanto

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \ \forall\, x \in X. \tag{3.2}$$

Recíprocamente, si se satisface (3.2) notemos que se cumple (3.1). Concluimos entonces que la desigualdad (3.2) equivale a que T sea un operador lineal acotado.

Finalmente observemos que, por cumplirse $T(\lambda x) = \lambda Tx, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, para concluir que T es un operador lineal acotado, basta verificar que T es acotado en alguna bola $B_r(0)$, donde $r > 0$.

Teorema 1. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) T es uniformemente continuo.

ii) T es continuo en algún punto de X.

iii) T es un operador lineal acotado.

Demostración i) $\Longrightarrow$ ii) Esta implicación es clara.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Supongamos que T es continuo en $x_0 \in X$. Considerando $\epsilon = 1$, existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq 1. \tag{3.3}$$

Sea $w \in X$ tal que $\|w\| \leq 1$. Tomando $x = x_0 + \delta w$, resulta $\|x - x_0\| \leq \delta$. Usando ahora (3.3) y la linealidad de T obtenemos

$$\delta\|Tw\| = \|Tx - Tx_0\| \leq 1.$$

Por lo tanto $\|Tw\| \leq \frac{1}{\delta}, \ \forall\, w \in B_X$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Elijamos $c > 0$ tal que $\|Tw\| \leq c\|w\|, \ \forall\, w \in X$. Luego, para $x, v \in X$ se cumple

$$\|Tx - Tv\| = \|T(x - v)\| \leq c\|x - v\|. \ \square$$

Sean X y Y espacios normados, y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. 1) Entonces T es uniformemente continuo y, aplicando el lema 2.13, resulta que T preserva sucesiones de Cauchy.

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie convergente en X, entonces

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) &= T\left(\lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = \lim_{N\to\infty} T\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{N} Tx_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n. \end{aligned}$$

Así, T preserva series convergentes.

3) Su núcleo es un subespacio vectorial cerrado, pues

$$N(T) = T^{-1}(0).$$

Ejemplo 2. Sean D un conjunto no vacío, Y un espacio normado y consideremos el espacio normado de funciones acotadas $B(D, Y)$. Para cada $a \in D$ definamos el operador *evaluación en a*, $\delta : B(D, Y) \to Y$, por

$$\delta(f) \ := \ f(a).$$

Observemos que δ es lineal. Ya que

$$\|\delta(f)\| \ = \ \|f(a)\| \ \leq \ \|f\|_\infty,$$

concluimos que δ es un operador lineal acotado.

Notas
Clase 17, marzo 29, 2023
Fernando Galaz Fontes