Hemos visto que el núcleo de un operador lineal acotado siempre es un espacio cerrado, el siguiente ejemplo muestra que su rango puede no serlo.

Ejemplo 3. Fijemos $p \in [1, \infty)$ y tomemos $\ell^p = \ell^p(\mathbb{K})$, $c_0 = c_0(\mathbb{K})$. Consideremos $s = \{a_n\} \in \ell^p$. Se sigue entonces que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, lo cual indica que $s \in c_0$. Esto prueba que $\ell^p \subseteq c_0$.

Denotemos por $i : \ell^p \to c_0$ el operador *inclusión*, esto es, $i(x) = x, \forall\, x \in \ell^p$. Veamos que i es un operador lineal acotado. Claramente, i es lineal. Sean $s = \{a_n\} \in \ell^p$ y $N \in \mathbb{N}$. Ya que $|a_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_N|^p)^{\frac{1}{p}} = \|s\|_p$, al tomar el supremo respecto de N, obtenemos la desigualdad

$$\|s\|_\infty \leq \|s\|_p, \forall\, s \in \ell^p. \tag{3.4}$$

Esta desigualdad indica que la inclusión $i : \ell^p \to c_0$ es un operador lineal acotado. Probaremos ahora que su rango $R(i) = \ell^p$ no es cerrado en c_0. Sea $x = \{b_n\}$, donde $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Notemos que $x \in c_0$ y $x \notin \ell^p$. Puesto que $x \in c_0$, de acuerdo a la proposición 1.1 (p. 33) se cumple que $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$, esto es, la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\}$ converge a x en c_0. Observando que cada una de estas sumas parciales está en ℓ^p y que $x \notin \ell^p$, concluimos que ℓ^p no es cerrado en c_0.

Más adelante requeriremos del siguiente resultado.

Lema 2. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces, T es $1-1$ y $T^{-1} : R(T) \to X$ es continuo si, y sólo si, existe $c > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \;\geq\; c\|x\|, \;\forall\, x \in X. \tag{3.5}$$

Demostración Supongamos primero que T es 1-1 y $T^{-1} : R(T) \to X$ es continuo. Luego, existe $k > 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq ky$, $\forall\, y \in R(T)$. Tomando $y = Tx, x \in X$, se obtiene (3.5) con $c = k^{-1}$.

Supongamos ahora que se cumple (3.5). Sea $x \in X$ tal que $Tx = 0$. Por (3.5), esto implica que $x = 0$. Luego, T es 1-1. Tomando $y = Tx$ en (3.5), resulta $\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$, $\forall\, y \in R(T)$. Lo cual indica que $T^{-1} : R(T) \to X$ es un operador lineal acotado. $\square$

3.2. Espacio de operadores lineales acotados

Dados unos espacios normados X y Y, denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ la colección de operadores lineales acotados $T : X \to Y$. Además $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$. A partir de la proposición 2.9 resulta que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio vectorial.

Para cualquier operador lineal $T : X \to Y$ definimos

$$\|T\| := \sup\{\, \|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1\}. \tag{3.6}$$

Observemos que $\|T\|$ puede ser ∞ y que

$$T \in \mathcal{L}(X,Y) \text{ si, y sólo si, } \|T\| < \infty.$$

Además, es útil notar que $\|T\|$ también se puede expresar como

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c, \ \|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \ x \in X\}. \end{aligned}$$

Asímismo, de (3.6) resulta

$$\|Tx\| \ \leq \ \|T\| \, \|x\|, \ \forall\, x \in X. \tag{3.7}$$

Teorema 2. *Sean X y Y espacios normados.*
i) La función $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{L}(X,Y)$.
ii) Si Y es completo, entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es completo.

Demostración i) Claramente $\|\cdot\|$ es una función no-negativa y $\|0\| = 0$. Sean $S, T \in \mathcal{L}(X,Y), c \in \mathbb{K}$. Si $\|T\| = 0$, de (3.7) se sigue que $T = 0$. Asímismo

$$\|cT\| = \sup\{\|cTx\| : \|x\| \leq 1\} = \ |c| \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \ |c|\|T\|.$$

Finalmente, ya que

$$\|(T+S)x\| \ \leq \ \|Tx\| + \|Sx\| \ \leq \ (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \ \forall\, x \in X,$$

resulta que $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

ii) Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Entonces $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones acotadas $B(B_X, Y)$. Ya que este espacio normado es completo, existe $T \in B(B_X, Y)$ tal que $T_n \to T$ en $B(B_X, Y)$. Extendamos ahora T definiendo $\overline{T}x = Tx$ si $\|x\| \leq 1$ y

$$\overline{T}(x) := \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \text{ si } \|x\| > 1.$$

Sea $x \in X$ tal que $\|x\| > 1$. Usando que las evaluaciones son continuas en $B(B_X, Y)$ resulta entonces que

$$T_n(x) = \|x\| T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \to \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \overline{T}x.$$

Esto prueba que $T_n \to \overline{T}$. Aplicando ahora el lema 2.16 concluimos que $\overline{T}$ es lineal. Sólo resta notar que de la definición de T se sigue que $\overline{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y que $T_n \to \overline{T}$ en $\mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

La siguiente propiedad de la norma operador resulta fundamental.

Proposición 1. *Sean X, Y y Z espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, entonces $S \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ y $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.*

Demostración La conclusión se obtiene al notar que

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|, \ \forall\, x \in X. \ \square$$

Notas
Clase 18, abril 17, 2023
Fernando Galaz Fontes