En general, puede ser bastante complicado el determinar la norma de un operador lineal acotado. Sin embargo, como apreciaremos enseguida, en los ejemplos de la sección pasada sí podemos hacerlo.

Ejemplo 4. Operadores evaluación en $B(D, Y)$

Sean D un conjunto no vacío y Y un espacio normado distinto de $\{0\}$. Fijemos $a \in D$ y sea $\delta : B(D, Y) \to Y$ el operador evaluación en a. En el ejemplo 2 vimos que $\|\delta(f)\| = \|f(a)\| \leq \|f\|_\infty$, $\forall f \in B(D, Y)$. Lo cual implica que $\|\delta\| \leq 1$. Concluiremos que $\|\delta\| = 1$ probando ahora que $\|\delta\| \geq 1$.

Ya que $Y \neq \{0\}$ tomemos $y_0 \in Y$ tal que $\|y_0\| = 1$. Definamos después $f : D \to Y$ por $f(x) = 0$ si $x \neq a$ y $f(a) = y_0$. Entonces $\|f\|_\infty = 1$. Luego $\|\delta\| \geq \|\delta(f)\| = \|y_0\| = 1$.

Ejemplo 5. Proyecciones en ℓ^p

Fijemos $p \in [1, \infty]$ y tomemos $j \in \mathbb{N}$. La j-ésima *proyección*, es la función $\pi_j : \ell^p \to \mathbb{K}$ definida por

$$\pi_j(\{a_n\}) = a_j.$$

Observemos que π_j es lineal. Puesto que

$$|\pi_j(x)| \leq \ \|x\|_p, \ \forall x \in \ell^p,$$

el operador lineal π_j es continuo y $\|\pi_j\| \leq 1$. Para concluir que $\|i\| = 1$, veremos enseguida que $\|i\| \geq 1$.

Tomemos $s_0 = e_1$. Entonces $\|s_0\|_p = 1$ y $\|i(s_0)\|_\infty = \|s_0\|_\infty = 1$. Se sigue ahora que $\|i\| \geq 1$.

Observación 2. Al identificar una sucesión $\{a_n\}$ con la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que $f(n) = a_n$, notemos que la proyección π_j viene a ser simplemente la evaluación de f en j. Esto es, $\pi_j(\{a_n\}) = a_j = f(j)$.

Definición 2. Sean X y Y espacios normados tales que $X \subseteq Y$.

a) Llamaremos *inclusión* al operador $i : X \to Y$ definido por $i(x) = x$.

i) Si la inclusión $i : X \to Y$ es continua, diremos que i es un *encaje* (o que X está encajado en Y). Para expresar esto indicaremos $X \hookrightarrow Y$.

Ya que una inclusión $i : X \to Y$ es lineal, notemos que i es un encaje si, y sólo si, existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \ \leq \ c\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Ejemplo 6. Encaje de ℓ^p en c_0, $1 \leq p < \infty$

Fijemos $p \in [1, \infty)$. En el ejemplo 3 probamos que $\ell^p \subseteq c_0$ y que, siendo $i : \ell^p \to c_0$ la inclusión, se cumple que $\|i(s)\|_\infty \leq \|s\|_p, \ \forall\, s \in \ell^p$. Por lo tanto $\|i\| \leq 1$. Para concluir que $\|i\| = 1$, veremos enseguida que $\|i\| \geq 1$.

Tomemos $s_0 = e_1$. Entonces $\|s_0\|_p = 1$ y $\|i(s_0)\|_\infty = \|s_0\|_\infty = 1$. De la definición de $\|i\|$ se sigue ahora que $\|i\| \geq 1$.

El siguiente funcional aparece naturalmente en el espacio de sucesiones convergentes c.

Ejemplo 7. Definamos $\varphi : c \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} a_n, \ \forall\, x = \{a_n\} \in c.$$

De las propiedades de las sucesiones convergentes se sigue que φ es lineal. Ya que $|a_n| \leq \|x\|_\infty, \forall\, n \in \mathbb{N}$, al hacer $n \to \infty$, resulta

$$|\varphi(x)| \ \leq \ \|x\|_\infty, \ \forall\, x \in c,$$

lo cual indica que $\|\varphi\| \leq 1$. Así, φ es un funcional lineal acotado y $\|\varphi\| \leq 1$.

Por otra parte, denotando por $\mathbf{1}$ la sucesión constante 1, obtenemos que $\|\mathbf{1}\| = 1$ y $\varphi(\mathbf{1}) = 1$. Concluimos entonces que $\|\varphi\| = 1$.

Usando el funcional φ anterior probaremos a continuación que el espacio normado c_0 es completo.

Puesto que $c_0 \subseteq c$ y c es completo, basta establecer que c_0 es cerrado en c. Lo cual se sigue directamente de observar que $c = N(\varphi)$ y $\varphi : c \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal acotado.

Extensión lineal y continua

Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Supongamos que $T : V \to Y$ es un operador lineal continuo. Luego, T es uniformemente continuo y, por el teorema 2.2.2, es posible extenderlo unívocamente de forma continua a la cerradura $\overline{V}$. Probaremos enseguida que esta extensión sigue siendo lineal y con la misma norma de T.

Lema 2. *Sea X un espacio normado. Si V es un subespacio vectorial de X, entonces $\overline{V}$ es un espacio vectorial.*

Demostración Sean $x, y \in \overline{V}, c \in \mathbb{K}$. Tomemos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq V$, tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Luego $x_n + y_n \to x + y,\ cx_n \to cx$.

Esto indica que $x + y \in \overline{V}$ y $cx \in \overline{V}$. Puesto que $0 \in \overline{V}$, concluimos entonces que $\overline{V}$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

Teorema 3. *Sean X y Y espacios normados, y $V \subseteq X$ un subespacio vectorial. Si $T : V \to Y$ es un operador lineal acotado y Y es completo, entonces existe una única extensión $\overline{T} : \overline{V} \to Y$ que es continua. Además $\overline{T}$ es lineal y $\|\overline{T}\| = \|T\|$.*

Demostración Siendo un operador lineal acotado, T es uniformemente continuo. Aplicando ahora el teorema 2.2.2 concluimos que su extensión continua $\overline{T} : \overline{V} \to Y$ es única y uniformemente continua.

Sean $x, y \in \overline{V}, c \in \mathbb{K}$, y tomemos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Puesto que $x_n + y_n \to x + y$ y $cx_n \to cx$, de la continuidad de $\overline{T}$ resulta ahora que $T(x_n+y_n) = Tx_n+Ty_n \to \overline{T}x+\overline{T}y$, $cTx_n = T(cx_n) \to c\overline{T}x$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\overline{T}(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (Tx_n + Ty_n) = \overline{T}x + \overline{T}y, \\
\overline{T}(cx) &= \lim_{n\to\infty} T(cx_n) = \lim_{n\to\infty} cT(x_n) = c\overline{T}x.
\end{aligned}$$

Esto indica que $\overline{T}$ es lineal.

Puesto que $B_V \subseteq B_{\overline{V}}$, se cumple $\|T\| \leq \|\overline{T}\|$. Para establecer la otra desigualdad, consideremos $x \in \overline{V}$ y tomemos una sucesión $\{x_n\} \subseteq V$ tal que $x_n \to x$. Usando la continuidad de T y de las normas resulta entonces que

$$\|\overline{T}x\| = \|\lim_{n\to\infty} Tx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\,\|x_n\| = \|T\|\,\|x\|,\ \forall\, x \in \overline{V}.$$

Por lo tanto, $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. $\square$

Observación 3. Sean X y Y espacios de Banach. De acuerdo al teorema anterior, para definir un operador lineal continuo $T : X \to Y$ basta definirlo entonces en un subespacio vectorial V que sea denso en X.

3.3. Norma en el espacio cociente

Sean X un espacio normado y $W \subseteq X$ un subespacio vectorial. Nos interesa entonces definir una norma "apropiada"en el espacio cociente X/W.

En la sección 1.1. establecimos que la clase de equivalencia módulo W de $x \in X$ es $[x] = x + W$. Considerando que en un espacio normado la norma de un elemento es su distancia al origen, proponemos la definición

$$\| [x] \|_{X/W} \ := \ d(0, x + W), \forall\, x \in X,$$

donde $d(0, x + W)$ es la distancia del 0 en X al conjunto $x + W \subseteq X$. Así

$$\| [x] \|_{X/W} = \text{ínf}\{\|x + w\| : w \in W\}. \tag{3.8}$$

Siendo W un subespacio vectorial, se cumple que $-W = W$, por lo que $\| [x] \|_{X/W}$ también se puede expresar como

$$\| [x] \|_{X/W} \ = \ \text{ínf}\{\|x - w\| : w \in W\} \ = \ d(x, W), \ \forall\, x \in X. \tag{3.9}$$

Supongamos momentáneamente que W no es cerrado, y consideremos $x \in \overline{W} \setminus W$. Entonces $[x] \neq 0$ y, de acuerdo con (3.9), $\| [x] \|_{X/W} = 0$. Esto indica la necesidad de que el subespacio W sea cerrado para que $\|\cdot\|_{X/W}$ pueda ser una norma.

Lema 3. *Sean X un espacio normado, $W \subseteq X$ un subespacio vectorial y $\|\cdot\|_{X/W}$ la función definida por (3.8).*
i) $\|\cdot\|_{X/W}$ es una seminorma en X/W.
ii) Si W es cerrado, entonces $\|\cdot\|_{X/W}$ es una norma, a la cual llamaremos norma cociente*.*

Demostración i) Claramente, la función $\|\cdot\|_{X/W}$ toma valores no-negativos y $\| [0] \|_{X/W} = 0$. Consideremos $x \in X$ y $c \in \mathbb{K}$. Si $c = 0$, entonces $\| [cx] \|_{X/W} = 0 = |c| \, \| [x] \|_{X/W}$. Supongamos ahora que $c \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \|c[x]\|_{X/W} \ &= \ \| [cx] \|_{X/W} \ = \ \text{ínf}\{\|cx - w\| : w \in W\} \\ &= \ |c| \, \text{ínf}\{\|x - \frac{w}{c}\| : w \in W\} \\ &= \ |c| \, \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in W\} = \ |c| \| [x] \|_{X/W}. \end{aligned}$$

Sean $x, y \in X$. Dado $\epsilon > 0$, por (3.9), existen $w, z \in W$ de manera que

$$\|x - w\| \ \leq \ \| [x] \|_{X/W} + \epsilon, \ \|y - z\| \ \leq \ \| [y] \|_{X/W} + \epsilon.$$

Puesto que $w, z \in W$, esto implica

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\|_{X/W} &= \| [x + y] \|_{X/W} \leq \|x + y - w - z\| \\ &\leq \|x - w\| + \|y - z\| \leq \| [x] \|_{X/W} + \| [y] \|_{X/W} + 2\epsilon. \end{aligned}$$

De aquí, después de hacer $\epsilon \to 0$, se obtiene la desigualdad del triángulo.

ii) Consideremos $x \in X$ tal que $\| [x] \|_{X/W} = 0$. Usando (3.9) resulta entonces que $d(x, W) = 0$, esto es $x \in \overline{W}$. Ya que W es cerrado, se sigue que $x \in W$, es decir, $[x] = 0$. $\square$

Notas
Clase 19, abril 19, 2023
Fernando Galaz Fontes